

## 浅海海中位置推定に特化した電界数値積分の高速化について

石井 望<sup>†</sup> 高橋 応明<sup>††</sup> 陳 強<sup>†††</sup> 吉田 弘<sup>††††</sup>

<sup>†</sup>新潟大学 〒950-2181 新潟市西区五十嵐2の町 8050

<sup>††</sup>千葉大学 〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33

<sup>†††</sup>東北大学 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05

<sup>††††</sup>海洋研究開発機構 〒237-0061 神奈川県横須賀市夏島町 2 番地 15

E-mail: [†nishii@eng.niigata-u.ac.jp](mailto:†nishii@eng.niigata-u.ac.jp)

**あらまし** 著者らは電磁界を利用した浅海海中位置推定について検討している。この場合、例えば、送信側の微小ダイポールからの電磁界を評価する必要がある。FDTD法などの電磁界シミュレーション、あるいは、ラテラル波の寄与を含めた近似式を利用することで、例えば、10kHzの周波数を利用するのであれば、海面から10m程度の深さにおける微小ダイポールによる電磁界を近似することができる。しかしながら、この電磁界分布を得るために、FDTD法は前もって膨大な時間をかけて計算を行っておく必要があること、近似式は周波数・距離によって適用できない場合があることなどの問題がある。本稿では、大気・海中2層問題に限定し、電磁界の厳密式が積分形式で与えられていることに着目する。すなわち、我々が取り扱おうとする問題に対して、数値積分の際の注意点を明らかにし、さらには、数値積分の計算時間の短縮化を図ったので、その報告を行う。

**キーワード** 大気・海中2層問題, 電磁界, 微小ダイポール, Bessel関数, 2重指数型公式, 漸近抽出法

## Acceleration of Numerical Integration of Electric Field Specialized for Shallow Sea Position Estimation

Nozomu ISHII<sup>†</sup>, Masaharu TAKAHASHI<sup>††</sup>, Qiang CHEN<sup>†††</sup>, and Hiroshi YOSHIDA<sup>††††</sup>

<sup>†</sup>Niigata University 8050 Ikarashi 2-nocho, Nishi-ku, Niigata, 950-2181 Japan

<sup>††</sup>Chiba University 1-33 Yayoicho, Inage-ku, 263-8522 Japan

<sup>†††</sup>Tohoku University 6-6-05, Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai 980-8579 Japan

<sup>††††</sup>Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology 2-15 Natsushima-cho, Yokosuka, 237-0061 Japan

E-mail: [†nishii@eng.niigata-u.ac.jp](mailto:†nishii@eng.niigata-u.ac.jp)

**Abstract** The authors have studied shallow a location system in the shallow sea using electromagnetic fields. In this case, it is necessary to evaluate the electromagnetic fields radiated from an infinitesimal dipole antenna on the transceiver. By using electromagnetic field simulation such as FDTD or approximate expressions that include the contribution of lateral waves, we can approximately estimate electromagnetic field distribution generated by the infinitesimal dipole antenna at a depth of about 10 m from the sea surface at the frequency of 10 kHz. However, in order to obtain this distribution, FDTD needs to be calculated in advance over a huge amount of time, and the approximate expressions may not always be applicable depending on the frequency and distance. In this manuscript, we review the problem of two layers that consist of the air and the sea water, and focus on the fact that the corresponding exact formula of the electromagnetic field is given in the integral form. In other words, we report the points to be noted in numerical integration for the problem, and further shortened the calculation time for numerical integration.

**Key words** Air-sea two layer problem, electromagnetic field, infinitesimal dipole, Bessel function, double exponential-type quadrature formula, asymptotic extraction technique

## 1. はじめに

海中における電磁波利用は、その減衰の大きさのため、大気中での利用に比べ、著しく開発が遅れている。ここ数十年の計算機シミュレーション技術、計測機器の進歩により、再び海中における電磁波利用に関する研究・開発が行われるようになってきた[1]~[4]。なかでも、海面あるいは海底などの海水との境界面におけるアプリケーションに注目が集まっており[2]、そのような構造における電磁界の振る舞いを調べる必要が生じている。その最も基本的な構造として、海面を平面境界とする海水・大気2層問題がある。この問題は、大地上のアンテナを解析する古典的な無線通信の問題に端を発しており、1世紀以上にわたり多くの研究が行われている[5]~[8]。

この古典的な2層問題は、FDTD法をはじめとする数値電磁界解析シミュレーションにより解くことができる[9],[10]。しかしながら、この2層問題に内在する物理を明らかにするためには、経験的にシミュレーション結果を説明する論理を見出す必要がある。また、膨大な計算時間を要するという問題もある。

これに対して、古典的な2層問題は、積分が含まれるものの、厳密に電磁界成分を導出でき、式変形などにより背後の物理的な意味を解釈できる[5]~[7],[11]。さらに、積分を適切に数値評価できれば、FDTD法などの電磁界シミュレーションに比べて、比較的高速に電磁界成分を計算できる。

海中・大気2層問題において、電氣的微小ダイポールによる電磁界の近似式についても数多く研究されている[6]~[8]。しかしながら、近似式の適用にあたり、波源点、観測点の深さ・高さに比べて波源点と観測点の間の距離が十分に大きいという条件が課されている[6],[7]。あるいは、近傍領域、中間領域、遠方領域等の領域別に近似式が導出されているが、どの位置で領域を切り替えればよいのかが不明確な場合もある[7]。また、直接波の厳密式とラテラル波の近似式を別々に扱う必要があり、この場合も遷移領域の取り扱いが不明確となる[8],[9]。

本稿では、著者らが検討を進めている浅海域における海中位置推定システム[2],[10]の基本となる、海中に置かれた電氣的微小ダイポールによる電磁界について上記の古典的手法で得られる積分の数値処理について取りまとめる[12]。

## 2. 問題の定式化

### 2.1 海中・大気2層問題の設定

図1に示すように、 $z > 0$ を海水領域、 $z < 0$ を大気領域とするような座標系を設定する。海水領域内の点 $S(0, 0, d)$ に電氣的微小ダイポールを置き、点 $P(x, y, z)$ における電磁界を観測する。観測点 $P$ は円筒座標系 $(\rho, \phi, z)$ で表現することができ、 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\phi = \tan^{-1}(y/x)$ の関係にある。また、観測される電磁界は円筒座標成分で表示される。簡単のため、電氣的微小ダイポールの電流モーメントは1とする。電氣的微小ダイポールの向きは、文献[6]に従い、 $z$ 向きおよび $x$ 向きの2通りを考え、電磁界成分表示の際には上付の<sup>(ve)</sup>および<sup>(he)</sup>にて区別する。例えば、 $x$ 向きの電氣的微小ダイポールによる領域1内の

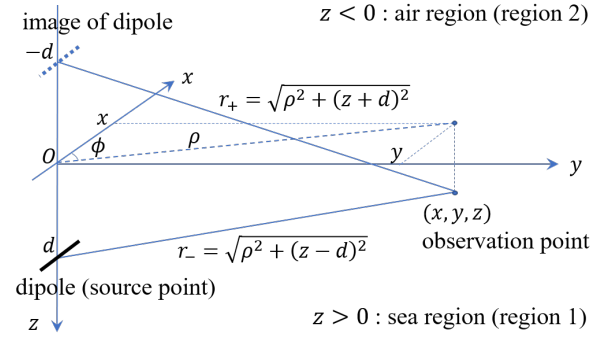


図1 海中・大気2層問題の座標系

電界の $\phi$ 成分を $E_{1\phi}^{(he)}$ と表記する。

十分に低い周波数、例えば、kHz帯の周波数では、海水は導電媒質とみなすことができるので、海水の導電率を $\sigma$ とすると、海水における波数は $k_1 = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma}$ で与えられる。ここで、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位、 $\omega$ は角周波数、 $\mu_0$ は自由空間の透磁率である。一方、大気における波数は $k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ で与えられる。ここで、 $\epsilon_0$ は自由空間の誘電率である。十分に低い周波数では、 $|k_1| \gg k_2$ の関係が成り立つ。

以降では、海中位置推定システムにおいて主たる寄与となりうる電界成分 $E_{j\rho}^{(he)}$ 、 $E_{j\phi}^{(he)}$ 、 $E_{jz}^{(he)}$  ( $j = 1, 2$ )について検討する。<sup>1</sup>

### 2.2 電磁界の積分表示

図1に示す海水・大気2層問題における厳密な電磁界の導出は文献[6]に記載されている。 $x$ 方向を向いた電氣的微小ダイポールによる電界成分は、0次および1次の第1種Bessel関数 $J_0$ および $J_1$ を用いて表すと、領域1(海水領域)では

$$E_{1\rho}^{(he)} = \frac{\omega\mu_0}{4\pi k_1^2} \cos\phi \left[ g_3^{(-)} - g_3^{(+)} - 2k_1^2 I_3 - \frac{2k_1^2 I_4}{\rho} \right] \quad (1)$$

$$E_{1\phi}^{(he)} = \frac{\omega\mu_0}{4\pi k_1^2} \sin\phi \left[ -g_5^{(-)} + g_5^{(+)} + 2k_1^2 I_5 - \frac{2k_1^2 I_4}{\rho} \right] \quad (2)$$

$$E_{1z}^{(he)} = \frac{\omega\mu_0}{4\pi k_1^2} \cos\phi \left[ -g_1^{(-)} + g_1^{(+)} + 2ik_1^2 I_6 \right] \quad (3)$$

となり、領域2(大気領域)では

$$E_{2\rho}^{(he)} = -\frac{\omega\mu_0}{2\pi} \cos\phi \left[ I_{13} + \frac{I_{14}}{\rho} \right] \quad (4)$$

$$E_{2\phi}^{(he)} = \frac{\omega\mu_0}{2\pi} \sin\phi \left[ I_{15} - \frac{I_{14}}{\rho} \right] \quad (5)$$

$$E_{2z}^{(he)} = -\frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \cos\phi \cdot I_{16} \quad (6)$$

となる。Bessel関数に関する漸化式[13]により、整数次のBessel関数は0次と1次のBessel関数を用いて表せることを利用した。 $g_1^{(\pm)}$ 、 $g_3^{(\pm)}$ 、 $g_5^{(\pm)}$ については、複号が-の場合、入射波を表し、複号が+の場合、点 $S'(0, 0, -d)$ のイメージダイポールによる完全反射波を表しており

(注1)：以降の議論で、 $g_j$ 、 $I_j$ 、 $f_j$ 等の式の式において下付添字が1から始まっていないのは、 $x$ 偏波の電氣的微小ダイポールによる電界成分 $E_{j\rho}^{(he)}$ 、 $E_{j\phi}^{(he)}$ 、 $E_{jz}^{(he)}$  ( $j = 1, 2$ )のみを扱うためである。

表1 積分  $I_j$  の被積分関数  $f_j$  ( $j = 3, \dots, 6, 13, \dots, 16$ )

$j$	$f_j$	$j$	$f_j$
3	$\frac{\gamma_1 \gamma_2}{N} e^{i\gamma_1(z+d)} J_0(\lambda\rho)\lambda$	13	$\frac{\gamma_1 \gamma_2}{N} e^{i(\gamma_1 d - \gamma_2 z)} J_0(\lambda\rho)\lambda$
4	$\frac{1}{N} e^{i\gamma_1(z+d)} J_1(\lambda\rho)\lambda^2$	14	$\frac{1}{N} e^{i(\gamma_1 d - \gamma_2 z)} J_1(\lambda\rho)\lambda^2$
5	$\frac{1}{M} e^{i\gamma_1(z+d)} J_0(\lambda\rho)\lambda$	15	$\frac{1}{M} e^{i(\gamma_1 d - \gamma_2 z)} J_0(\lambda\rho)\lambda$
6	$\frac{\gamma_2}{N} e^{i\gamma_1(z+d)} J_1(\lambda\rho)\lambda^2$	16	$\frac{\gamma_1}{N} e^{i(\gamma_1 d - \gamma_2 z)} J_1(\lambda\rho)\lambda^2$

$$M = \gamma_2 + \gamma_1, N = k_1^2 \gamma_1 + k_2^2 \gamma_1$$

$$g_3^{(\pm)} = - \int_0^\infty e^{i\gamma_1|z \pm d|} \left( \gamma_1 J_0(\lambda\rho) + \frac{J_1(\lambda\rho)\lambda}{\gamma_1 \rho} \right) \lambda d\lambda \quad (7)$$

$$g_5^{(\pm)} = - \int_0^\infty \frac{e^{i\gamma_1|z \pm d|}}{\gamma_1} \left( k_1^2 J_0(\lambda\rho) - \frac{J_1(\lambda\rho)\lambda}{\rho} \right) \lambda d\lambda \quad (8)$$

$$g_1^{(\pm)} = i \int_0^\infty \text{sgn}(z \pm d) e^{i\gamma_1|z \pm d|} J_1(\lambda\rho)\lambda^2 d\lambda \quad (9)$$

と与えられる。ただし、 $\gamma_j^2 = k_j^2 - \lambda^2$  ( $j = 1, 2$ ) とする。また、積分  $I_j$  ( $j = 3, \dots, 6, 13, \dots, 16$ ) はその被積分関数  $f_j$  を用いて

$$I_j = \int_0^\infty f_j \lambda d\lambda \quad (10)$$

と表される。表1に被積分関数  $f_j$  ( $j = 3, \dots, 6, 13, \dots, 16$ ) を示す。同表からわかるように、被積分関数  $f_j$  には0次もしくは1次の第1種 Bessel 関数  $J_0$  もしくは  $J_1$  が含まれる。

### 3. 数値積分処理

#### 3.1 直接波、完全反射波の closed form 化

領域1における電界表示(1),(2),(3)に含まれる  $g_3^{(\pm)}, g_5^{(\pm)}, g_1^{(\pm)}$  は、Sommerfeldの恒等式[5],[14]およびその偏微分の関係式を用いて、積分を含まない closed form に変形できる[6].

$$g_3^{(\pm)} = e^{ik_1 r} \left[ 2 \left( \frac{k_1}{r_\pm^2} + \frac{i}{r_\pm^3} \right) + \left( \frac{ik_1^2}{r_\pm} - \frac{3k_1}{r_\pm^2} - \frac{3i}{r_\pm^3} \right) \left( \frac{z \pm d}{r_\pm} \right)^2 \right] \quad (11)$$

$$g_5^{(\pm)} = e^{ik_1 r} \left( \frac{ik_1^2}{r_\pm} - \frac{k_1}{r_\pm^2} - \frac{i}{r_\pm^3} \right) \quad (12)$$

$$g_1^{(\pm)} = e^{ik_1 r} \left( \frac{ik_1^2}{r_\pm} - \frac{3k_1}{r_\pm^2} - \frac{3i}{r_\pm^3} \right) \frac{\rho(z \pm d)}{r_\pm^2} \quad (13)$$

ただし、 $r_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \pm d)^2}$  とする。

このように closed form 化する利点としては、 $g_3^{(\pm)}, g_5^{(\pm)}, g_1^{(\pm)}$  の物理的に意味するところが式の形から明確になるだけでなく、 $g_3^{(\pm)}, g_5^{(\pm)}, g_1^{(\pm)}$  の被積分関数に含まれる Bessel 関数  $J_0(\lambda\rho), J_1(\lambda\rho)$  の  $\lambda$  に対する振動性および収束の遅さに起因する数値積分の計算精度や計算時間の問題[15]を解決する点が挙げられる。実際に、観測点が波源点から遠くに離れると、すなわち、 $\lambda\rho$  が大きくなると、Bessel 関数の性質により数値積分の収束が

悪くなるが、closed form 化により、数値積分が不要となり、悪収束性の問題を考慮しなくてもよい。

#### 3.2 極周辺の取り扱い

被積分関数  $f_j$  に  $1/N$  が含まれる場合 ( $j = 3, 4, 6, 13, 14, 16$ ),  $1/N$  が

$$\frac{1}{N} = \frac{k_1^2 \gamma_2 - k_2^2 \gamma_1}{(k_1^2 - k_2^2)(\lambda^2 - k_0^2)} \quad (14)$$

と変形できることから、 $f_j$  は  $\lambda = k_0$  において極をもつ。ただし、 $k_0^2 = k_1^2 k_2^2 / (k_1^2 + k_2^2)$  とする[7]. 条件  $|k_1| \gg k_2$  より、 $k_0 \approx k_2$  であり、極  $\lambda = k_0$  において Cauchy の主値積分と同様の数値的な取り扱いが必要となる[15]. 実際には、汎用の数値積分ルーチンを注意深く適用することで、積分を数値的に評価することができる。

#### 3.3 第1種 Bessel 関数を含む振動積分の取り扱い

被積分関数  $f_j$  に含まれる第1種 Bessel 関数は、 $\lambda\rho$  が十分に大きいとき

$$J_n(\lambda\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\rho}} \cos\left(\lambda\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (15)$$

となることから[13]、被積分関数  $f_j$  は三角関数のように振動しつつも  $1/\sqrt{\lambda\rho}$  に従うため、その収束は非常に遅い。汎用数値積分ルーチンには、三角関数に従う振動に対応した適応型数値積分が組み込まれているが、標本点として三角関数の零点に選ぶことから、 $J_n(\lambda\rho)$  を含む振動積分に対しては必ずしも有効に機能するとは限らない。このため、このような振動積分を数値的に評価する手法が検討されている[15]~[18]. Golubovicらは、Bessel 関数を含む振動積分に対して、Bessel 関数の零点を標本点に選ぶような2重指数型積分公式を適用する手法(以下、Bessel-DE 公式と称する)について検討しており、前記の手法と比べて大差ない精度の結果が得られることを明らかにしている[16],[18].

積分  $I_j$  を数値的に評価するために、極を含む区間  $[0, ak_0]$  とそれを除く区間  $[ak_0, \infty)$  に分割する[16]. ここで、 $a \geq 1$  とする。区間  $[0, ak_0]$  における積分の評価については、3.2に述べたとおりである。区間  $[ak_0, \infty)$  における積分については、Bessel-DE 公式を適用し、悪収束性の数値積分の問題を解決する。Bessel-DE 公式では標本点を Bessel 関数の零点に選ぶため、積分  $I_j$  に要する時間を大幅に短縮できる。

$v(\lambda)$  が変化が緩やかな関数であるとして、被積分関数  $u_n(\lambda)$  が  $u_n(\lambda) = v(\lambda)J_n(\lambda\rho)$  と記述できる場合について、区間  $[ak_0, \infty)$  における積分を評価する。

$$T_n = \int_{k_0 a}^\infty u_n(\lambda) d\lambda \quad (16)$$

このために、次のように変数変換を行う。

$$\lambda = \frac{\pi}{h} \Phi(t) \quad (17)$$

$$\Phi(t) = t \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right) + \frac{h \cdot k_0 a}{\pi} \text{sech}\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right) \quad (18)$$

結果として、 $T_0, T_1$  は次式により数値的に評価される[19].

$$T_0 = \sum_{k=1}^N u_0 \left( \frac{\pi}{h} \Phi \left( h \frac{\xi_{0k}}{\pi} \right) \right) \Phi' \left( h \frac{\xi_{0k}}{\pi} \right) \frac{2}{\xi_{0k} [J_1(\xi_{0k})]^2} \quad (19)$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^N u_1 \left( \frac{\pi}{h} \Phi \left( h \frac{\xi_{1k}}{\pi} \right) \right) \Phi' \left( h \frac{\xi_{1k}}{\pi} \right) \frac{2}{\xi_{1k} [J_2(\xi_{0k})]^2} + u_1(k_0 a) \left( 2h - \frac{k_0 a \cdot h^2}{2} \right) \quad (20)$$

ここで、 $\xi_{nk}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) は第 1 種 Bessel 関数  $J_n$  の零点であり、 $J_n(\xi_{nk}) = 0$  である。文献 [16], [19] に記載されている数値実験によれば、刻み幅を  $h = 1/32$  とし、標本数  $N = 160$  とすればよいとある。しかしながら、例えば、 $E_{1z}^{(he)}$  に含まれる積分  $I_6$  など、積分によっては、刻み幅  $h$  をより小さくし、標本数  $N$  をより増やさなければならない場合がある。

### 3.4 準静的近似と漸近抽出法

前述のように、積分  $I_j$  の被積分関数  $f_j$  は、Bessel 関数  $J_n(\lambda\rho)$  の漸近的な性質により、 $\lambda\rho \gg 1$  のとき、振動し、収束が遅い。このような悪収束性は、被積分関数  $f_j$  に含まれる準静的な振る舞いに起因することが知られている [20]。したがって、被積分関数  $f_j$  の準静的近似を  $f_j^{(QS)}$  とするとき、関数  $f_j - f_j^{(QS)}$  は準静的な振る舞いが取り除かれていることになり、関数  $f_j - f_j^{(QS)}$  の積分は被積分関数  $f_j$  の積分よりも数値的な取り扱いが有利となる [20]。さらに、抽出された関数  $f_j^{(QS)}$  の積分を解析的に行うことができれば、積分  $I_j$  の評価が容易となる。

以上を数式により与えておく。 $\lambda \gg |k_1|$  のとき、 $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim i\lambda$ 、 $N \sim i\lambda k_1^2$  であり、被積分関数  $f_j$  に対する漸近近似  $f_j^{(QS)}$  を

$$f_j^{(QS)} = \lim_{\lambda \gg |k_1|} f_j \quad (21)$$

と記述し、 $f_j^{(QS)}$  に対応する積分を

$$I_j^{(QS)} = \lim_{\lambda \gg |k_1|} I_j = \int_0^\infty f_j^{(QS)} d\lambda \quad (22)$$

と定義する。このとき、積分  $I_j$  の漸近抽出は

$$I_j = \int_0^\infty \{f_j - f_j^{(QS)}\} d\lambda + I_j^{(QS)} \quad (23)$$

と表すことができる。これから、被積分関数  $f_j$  の準静的近似  $f_j^{(QS)}$  および  $I_j$  の準静的近似  $I_j^{(QS)}$  を予め計算しておけば、 $f_j - f_j^{(QS)}$  を区間  $[0, \infty)$  において数値積分すればよいことになる。さらに、 $f_j - f_j^{(QS)}$  に  $J_n(\lambda\rho)$  が含まれることから、上記数値積分では Bessel-DE 公式を利用すればよい。

表 2 に  $f_j^{(QS)}$  および  $I_j^{(QS)}$  ( $j = 3, \dots, 6, 13, \dots, 16$ ) を示す。 $I_j^{(QS)}$  を導出する際は、Sommerfeld 恒等式およびその偏微分の関係式の準静的近似 ( $k \rightarrow 0, \gamma \rightarrow i\lambda$ ) を利用する。 $|k_1| \gg k_2$  であることから、 $f_5^{(QS)} \sim f_{15}^{(QS)} \sim 0$  および  $I_5^{(QS)} \sim I_{15}^{(QS)} \sim 0$  となる。すなわち、積分  $I_5$  および  $I_{15}$  に対しては漸近抽出による数値計算上の優位性は実質的にない。なお、抽出された準静近似項は、直接波および完全反射波の距離に関する高次逆ベキ項とともに電氣的微小ダイポールによる準静電界を構成する [11]。

表 2  $f_j^{(QS)}$  および  $I_j^{(QS)}$  ( $j = 3, \dots, 6, 13, \dots, 16$ )

$j$	$f_j^{(QS)}$	$I_j^{(QS)}$
3	$\frac{i}{k_1^2} e^{-\lambda(z+d)} J_0(\lambda\rho) \lambda^2$	$-\frac{i}{k_1^2} \left\{ \frac{1}{r_+^3} - \frac{3(z+d)^2}{r_+^5} \right\}$
4	$-\frac{i}{k_1^2} e^{-\lambda(z+d)} J_1(\lambda\rho) \lambda$	$-\frac{i}{k_1^2} \frac{\rho}{r_+^3}$
5	$-i \frac{k_2^2}{k_1^2} e^{-\lambda(z+d)} J_0(\lambda\rho)$	$-i \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{1}{r_+}$
6	$\frac{1}{k_1^2} e^{-\lambda(z+d)} J_1(\lambda\rho) \lambda^2$	$\frac{1}{k_1^2} \frac{3\rho(z+d)}{r_+^5}$
13	$\frac{i}{k_1^2} e^{-\lambda(d-z)} J_0(\lambda\rho) \lambda^2$	$-\frac{i}{k_1^2} \left\{ \frac{1}{r_-^3} - \frac{3(d-z)^2}{r_-^5} \right\}$
14	$-\frac{i}{k_1^2} e^{-\lambda(d-z)} J_1(\lambda\rho) \lambda$	$-\frac{i}{k_1^2} \frac{\rho}{r_-^3}$
15	$-i \frac{k_2^2}{k_1^2} e^{-\lambda(d-z)} J_0(\lambda\rho)$	$-i \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{1}{r_-}$
16	$\frac{1}{k_1^2} e^{-\lambda(d-z)} J_1(\lambda\rho) \lambda^2$	$\frac{1}{k_1^2} \frac{3\rho(d-z)}{r_-^5}$

## 4. 数値計算例

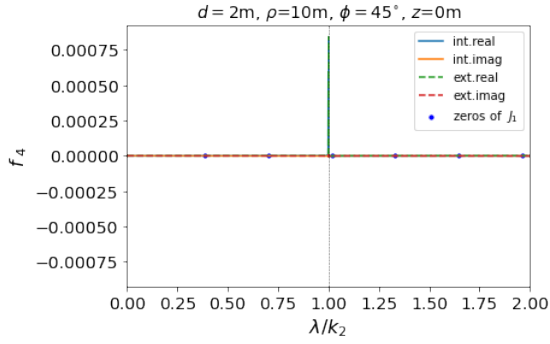
以下の数値例では、周波数を 10 kHz とし、海水の比誘電率の実部を  $\epsilon_r = 80$  とし、導電率を  $\sigma = 4 \text{ S/m}$  と設定する [21]。

### 4.1 被積分関数の $\lambda$ 依存性

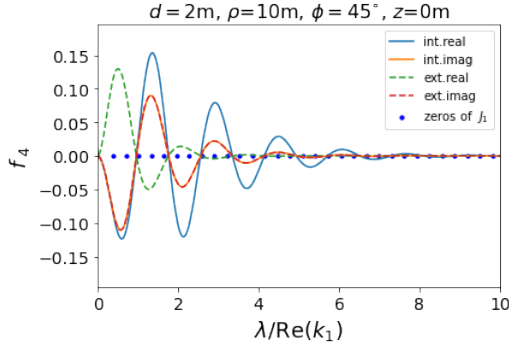
被積分関数  $f_j$  の  $\lambda$  依存性を調べるため、 $E_{1\rho}^{(he)}$  および  $E_{1\phi}^{(he)}$  に含まれる積分  $I_4$  の被積分関数  $f_4$  を例にとって説明する。図 1 において、波源位置について  $d = 2 \text{ m}$  とし、観測点位置について  $\rho = 10 \text{ m}$ 、 $z = 0 \text{ m}$ 、 $\phi = 45^\circ$  とするとき、被積分関数  $f_4$  を  $\lambda$  の関数として図示したのが図 2 である。

図 2(a) では、極  $\lambda = k_0$  の影響を確認するため、 $0 \leq \lambda/k_2 \leq 2$  の範囲で  $f_4$  の振る舞いを図示した。参考までに、10 kHz において  $k_2 = 2.10 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$  である。図中の凡例 int.real, int.imag は漸近抽出前の被積分関数  $f_4$  の実部、虚部に対応し、ext.real, ext.imag は漸近抽出後の被積分関数  $f_4^{(QS)}$  の実部、虚部に対応する。 $\lambda = k_2$  近傍において、極の影響を受け、 $f_4, f_4^{(QS)}$  とも不連続に振る舞うが、それ以外では大きな変化はみられない。すなわち、極近傍での振る舞いを追従できれば、適型積分で数値的に対応可能であることを示唆している。具体的には、極の位置を分割点に設定するなどの注意をすれば、この区間の積分は汎用数値積分ルーチンで評価可能である。

図 2(b) では、 $\lambda$  が十分に大きいときの振る舞いを確認するため、 $0 \leq \lambda/\text{Re}(k_1) \leq 10$  の範囲で  $f_4$  を  $\lambda$  の関数として図示した。参考までに、10 kHz において  $k_1 = 0.397(1+i) \text{ m}^{-1}$  である。図中の凡例は図 2(a) と同じであり、被積分関数  $f_4$  に含まれる 1 次の第 1 種 Bessel 関数  $J_1$  の零点  $\xi_{1k}$  も併せて示してある。 $\lambda$  が大きくなるにつれて、関数  $f_4, f_4^{(QS)}$  の零点は  $J_1$  の零点  $\xi_{1k}$  に近づく様子がわかる。すなわち、 $\lambda$  が大きくなる時、 $f_4, f_4^{(QS)}$  ともに  $J_1$  の漸近的な振る舞いの影響を強く受ける。本稿で導入した Bessel-DE 公式では、その標本点を  $\xi_{1k}$  に選ぶ



(a)  $f_4$  ( $0 \leq \lambda/k_2 \leq 2$ )



(b)  $f_4$  ( $0 \leq \lambda/\text{Re}(k_1) \leq 10$ )

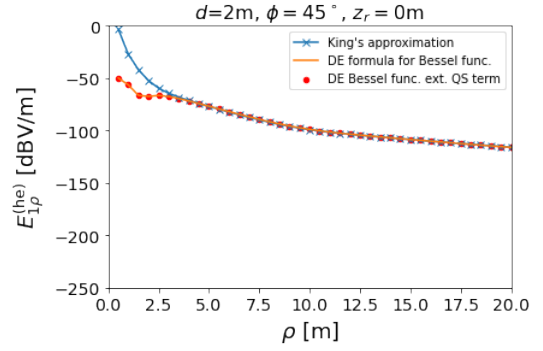
図2 被積分関数  $f_4$  の  $\lambda$  依存性 ( $d = 2\text{ m}$ ,  $\rho = 10\text{ m}$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $z = 0\text{ m}$ )

ことから、 $\lambda$ が大きくなると、振動する関数  $f_4$ ,  $f_4^{(\text{QS})}$  の零点の近くで標本することとなり、振動積分である  $I_4$ ,  $I_4^{(\text{QS})}$  の計算を数値的に効率よく実行できることが窺い知れる。さらに、漸近抽出の被積分関数に与える効果についても触れておく。図2から、漸近抽出の効果として、 $f_4$  の実部の変化が小さくなることがわかる。しかしながら、 $f_4$  と  $f_4^{(\text{QS})}$  の虚部は同じであり、 $f_4$  の虚部には漸近抽出の効果は認められない。 $\lambda$  が実数であるとき、 $f_4^{(\text{QS})}$  は  $i/k_1^2$  の因子を除いて実数であり、導電媒質では  $i/k_1^2 = 1/\omega\mu_0\sigma$  が実数となることから、結局、 $f_4^{(\text{QS})}$  は実数の関数ということになる。このため、関数  $f_4$  の実部のみが漸近抽出されるということになる。このことは他の漸近抽出可能な被積分関数  $f_j$  に対しても事情は同じであり、 $f_j$  の実部もしくは虚部のいずれかに対してのみ漸近抽出される。

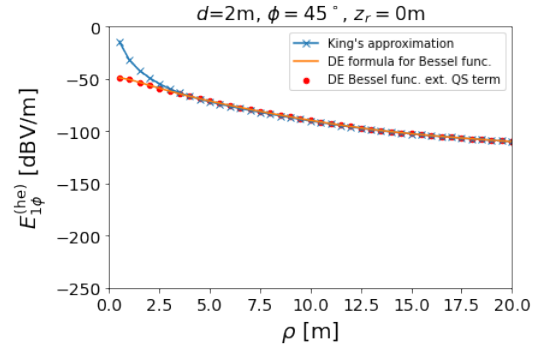
#### 4.2 微小ダイポール近傍における電界成分の距離特性

King の近似式 [6] と比較して、電氣的微小ダイポール近傍における電界成分の距離特性の数値計算例を示す。

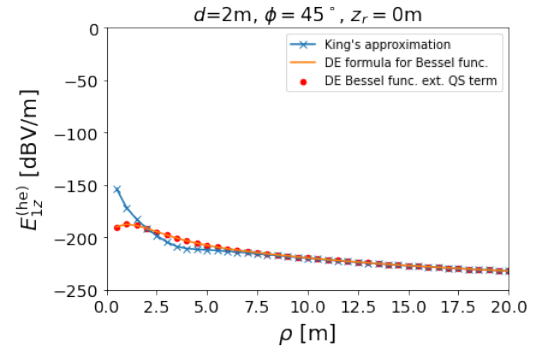
図3は領域1における電界成分  $E_{1\rho}^{(\text{he})}$ ,  $E_{1\phi}^{(\text{he})}$ ,  $E_{1z}^{(\text{he})}$  の大きさについての距離特性である。ここで、波源位置については  $d = 2\text{ m}$  とし、観測方向は  $\phi = 45^\circ$  とし、観測面は  $z = 0\text{ m}$  の海面としている。まず、各成分とも Bessel-DE 公式を用いた積分による結果とそれに対して漸近抽出を行った結果がよく一致していることがわかる。このことは、漸近抽出を行わなくとも、Bessel-DE 公式を利用することで3つの電界積分を精度よく計算できることを示唆している。次に、King の近似式による結果は、 $\rho < 5\text{ m}$  の範囲で、 $\rho$  が0に近づくにつれて、各成分とも数値積分の結果から乖離することがわかる。このような差異



(a)  $|E_{1\rho}^{(\text{he})}|$



(b)  $|E_{1\phi}^{(\text{he})}|$

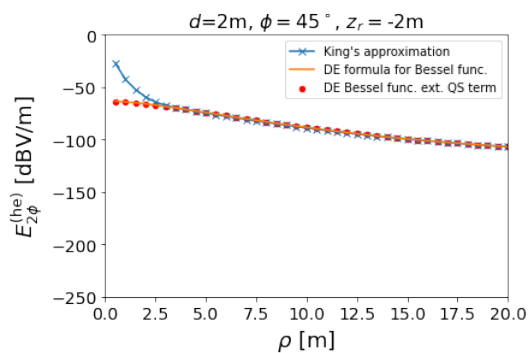


(c)  $|E_{1z}^{(\text{he})}|$

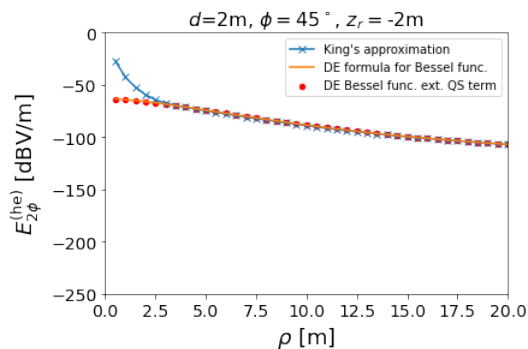
図3 領域1における Bessel-DE 公式と King の近似式による電界成分 ( $d = 2\text{ m}$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $z = 0\text{ m}$ )

は、King の近似式が成り立つ条件  $\rho > 5d$ ,  $\rho > 5|z|$ ,  $|k_1| > 3k_2$  のうち、 $\rho > 5d$  の条件を満足しないために生じると考えられる。著者らが検討している海中位置推定システムでは、 $\rho = 5d$  よりも波源に近い位置での探索を行う必要があるため、King の近似式を用いた電界成分推定では不十分であり、本報告で整理した数値積分の手法による評価が必要である。さらに、海水領域では  $E_{1\rho}^{(\text{he})}$ ,  $E_{1\phi}^{(\text{he})}$  に比べて  $E_{1z}^{(\text{he})}$  は十分に低いレベルなので実用的な問題はないと考えられるが、 $E_{1z}^{(\text{he})}$  はさらに  $\rho < 7.5\text{ m}$  の範囲で数値積分と King の近似式による結果に差異が生じていることを指摘しておく。

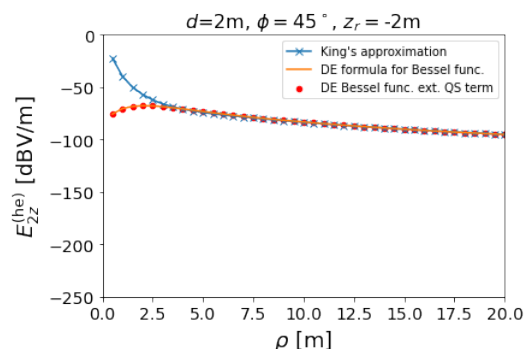
図4は領域2における電界成分  $E_{2\rho}^{(\text{he})}$ ,  $E_{2\phi}^{(\text{he})}$ ,  $E_{2z}^{(\text{he})}$  の大きさについての距離特性である。ここで、波源位置については  $d = 2\text{ m}$  とし、観測方向は  $\phi = 45^\circ$  とし、観測面は  $z = -2\text{ m}$  であり、空



(a)  $|E_{2\rho}^{(he)}|$



(b)  $|E_{2\phi}^{(he)}|$



(c)  $|E_{2z}^{(he)}|$

図4 領域2における Bessel-DE 公式と King の近似式による電界成分 ( $d = 2\text{ m}$ ,  $\phi = 45^\circ$ ,  $z = -2\text{ m}$ )

気領域の海面から高さ 2 m としている。図 3 と同様に、各成分とも Bessel-DE 公式を用いた積分による結果とそれに対して漸近抽出を行った結果がよく一致している。また、King の近似式による結果は、 $\rho < 5\text{ m}$  の範囲で、 $\rho$  が 0 に近づくにつれて、各成分とも数値積分の結果から乖離している。参考までに、図 3(c) と図 4(c) を比較することでわかるように、領域 1 と領域 2 の電界の  $z$  成分は大きくレベルが異なる。すなわち、海中では  $z$  成分は他の成分に比べて無視できるレベルであるが、大気中では他の成分よりも大きなレベルを示す [6], [8]。

なお、本稿で取り上げた Bessel-DE 公式を利用した数値積分に要する時間は、距離  $\rho$  により多少変動するものの、振動積分用の数値積分ルーチン<sup>2</sup>を利用した場合の約 1/100 であった。

(注2) : Python mpmath パッケージに含まれる quadosc

## 5. まとめ

浅海海中位置推定では、海中に設置された送信用電氣的微小ダイポールからの電磁界を海面等で評価する必要がある。これらの成分は数学的に厳密に求められるが、積分を含むため、その数値評価が必要になる。本稿では、これらの成分が 0 次と 1 次の第 1 種 Bessel 関数を含む積分で表現されることに着目し、Bessel 関数の零点を標本点とするような 2 重指数型公式により積分を数値的に評価できることを確認した。今後、海中に設置された電氣的微小ダイポールが海面に生成する電磁界分布を利用した海中位置推定について検討を行う予定である。

謝辞 本研究の一部は JSPS 科研費 19K04389 による。

## 文 献

- [1] 陳 他, “電波の海中応用へのアプローチ,” 信学技報, A-P2016-92, pp.25–28, Sep. 2016.
- [2] 高橋 他, “海中位置推定へのアプローチ,” 信学技報, A-P2016-188, pp.59–62, Mar. 2017.
- [3] 石井 他, “疑似スケールモデルを用いた微小ダイポールによる海水中電磁界,” 信学技報, A-P2016-125, pp.11–16, Dec. 2016.
- [4] H. Sato et al., “Dipole antenna with sheath-cover for seawater use,” *Proc. ISAP 2017*, POS1, 1376, Phuket, Thailand, Oct. 2017.
- [5] A. Sommerfeld 著, 増田 訳, 物理数学 偏微分方程式論, 講談社, 1969.
- [6] R. W. P. King, et al., *Lateral Electromagnetic Waves*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [7] A. Baños, Jr., *Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space*, Pergamon Press, 1966.
- [8] R. K. Moore et al., “Dipole radiation in a conducting half space,” *J. Res. Nat. Bur. Std. D, Radio Propagation*, vol.65, no.6, pp.547–563, Nov.-Dec. 1961.
- [9] 藤井 他, “海中無線通信用アンテナと伝搬モデルに関する研究,” 信学技報, A-P2018-5, pp.23–28, Apr. 2018.
- [10] R. Kato, et al., “Investigation of a 3D undersea positioning system,” *Proc. ICECOM 2019*, Dubrovnik, Croatia, Oct. 2019.
- [11] P. R. Bannister, “The quasi-near field of dipole antennas,” *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol.AP-15, no.5, pp.618–626, Sep. 1967.
- [12] 石井 他, “大気・海水 2 層問題における電界成分の数値積分評価,” 2020 信学ソ大, 通信 1, BS-5-7, pp.S-61 – S-62, Sep. 2020.
- [13] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, 1972.
- [14] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, IEEE Press, 1995.
- [15] J. R. Mosig, “Integral equation technique,” in *T. Itoh ed., Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-wave Passive Structure*, pp.133–213, John Wiley & Sons, 1989.
- [16] R. Golubovic et al., “Fast computation of Sommerfeld integral tails via direct integration based on double exponential-type quadrature formulas,” *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol.59, no.2, pp.694–699, Feb. 2011.
- [17] J. Mosig, “The weighted averages algorithm revisited,” *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol.60, no.4, pp.2011–2018, Apr. 2012.
- [18] R. Golubovic et al., “Efficient algorithms for computing Sommerfeld integral tails” *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol.60, no.5, pp.2409–2417, May 2012.
- [19] 緒方 他, “Bessel 関数を含む振動無限積分に対する数値積分公式,” 日本応用数理学会論文誌, vol.8, no.2, pp.223–256, 1998.
- [20] D. B. Davidson, *Computational Electromagnetic for RF and Microwave Engineering*, Cambridge University Press, 2005.
- [21] Rec. ITU-R P.527-3, “Electrical characteristics of the surface of the earth,” ITU, Geneva, 1992.