社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

高速多重極法を用いたアンテナの電磁界数値解析の検討

今野　佳祐†　　ザイフイチン†　　陳　　強†　　澤谷　邦男†

† 東北大学大学院 工学研究科 電気通信工学専攻　〒 980–8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05
E-mail: †{konno, zhai, chenq, sawaya}@ecei.tohoku.ac.jp

あらまし　アンテナの電磁界数値解析法としてモーメント法が有力であるが, 分割セグメント数 N が増加すると, 計算時間は N^3 に比例し, 計算機メモリが N^2 に比例し増加してしまう問題点がある．本研究では, 大規模アンテナの電磁界数値解析の計算時間と計算機メモリを減らす目的として, モーメント法に CG 法 (共役勾配法) 及び FMM(高速多重極法) を適用し, 本手法の収束性, 計算精度及び計算時間について検討したので, 報告する.

キーワード　モーメント法, 高速多重極法, 共役勾配法.

Electromagnetic Analysis of Antennas Using Fast Multipole Method

Keisuke KONNO†, Huiqing ZHAI†, Qiang CHEN†, and Kunio SAWAYA†

† Electrical and Communication Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University
Aramaki Aza Aoba 6-6-05, Aoba-ku, Sendai, 980–8579, Japan
E-mail: †{konno, zhai, chenq, sawaya}@ecei.tohoku.ac.jp

Abstract　Method of moments (MoM) is one of the efficient methods for numerical electromagnetic analysis of antennas. However, the CPU time and computer memory, which are proportional to $O(N^3)$ and $O(N^2)$, respectively, increase rapidly when number of segments N increases. In this research, the conjugate gradient(CG) method and the fast multipole method(FMM) are applied to MoM to reduce the CPU time and computer memory for numerical analysis of large-scale antennas. Convergence, accuracy and the CPU-time of the method are investigated.

Key words　Method of moments (MoM), Fast multipole method (FMM), Conjugate gradient (CG).

1. 背　　景

モーメント法 [1](Method of Moments, MoM) は微分方程式や積分方程式を連立方程式に変形し, 数値的にこれを解く方法であるが, 主に導体表面における電界積分方程式を連立方程式に変形し, これを数値的に解いて導体表面の電流分布を求めることに用いられる.

一般に, $N \times N$ の線形連立方程式を解く手法は, 直接法 (Gauss 消去法など), 反復法 (CG 法など) に分けられる．直接法の計算量は N^3 に比例するが, 反復法の 1 ステップあたりの計算量は N^2 と比例する．反復法の 1 ステップあたりの計算量を低減するため, 1990 年に V.Rokhlin によって高速多重極法 [2](FMM, Fast Multipole Method) が提案された．FMM を用いると, 反復法で必要な行列-ベクトル積の計算量を $O(N^2)$ から $O(N^{1.5})$ に減らすことができる．しかしながら, モデルやグループ分けなどの違いによる収束性及び計算時間の検討は必ずしも十分とは言えない．本研究では, 半波長ダイポールアンテナのモデルに対して CG-FMM 法を用いて数値解析を行い, その収束性や計算時間について検討した.

2. 電磁界数値解析の原理 [3]

2.1 モーメント法 [4] [5]

完全導体のアンテナや散乱体に外部から電界 $\mathbf{E}^{inc}$ が入射した場合を考える．完全導体表面での電界の接線成分は, 以下の式を満たす.

$$\left[\mathbf{E}^{S}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r})\right]_t = 0,\ \mathbf{r}\, on\, S \tag{1}$$

従って, 導体表面 S の面電流密度 $\mathbf{J}_s$ に対する電界積分方程式は,

$$\mathbf{E}_t^{inc}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \iint_S \left[\overline{\overline{G}}_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot J_s(\mathbf{r}')\right]_t d\mathbf{r}' \tag{2}$$

となる．ここで, $\mathbf{E}^{inc}$ は既知の入射電界, $\mathbf{E}^{s}$ は導体表面を流れる未知の面電流密度 $\mathbf{J}_s$ によって生じる散乱電界である．また, 添字の"t" は導体表面の接線成分を表し, $\overline{\overline{G}}_0$ は自由空間のダイアディックグリーン関数

$$\overline{\overline{G}}_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = (\frac{\nabla\nabla}{k_0^2} + \overline{\overline{I}})\frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3}$$

を表す．ここで, $\overline{\overline{I}}$ は単位ダイアド, k_0 は自由空間の平面波の波

数である. (2) 式を数値的に解く方法の 1 つがモーメント法である.

モーメント法では, 導体表面をセグメントに分割し, 各セグメント上での基底関数 (展開関数) $\mathbf{f}_{n'}(\mathbf{r}')$ を用いて, 面電流密度 $\mathbf{J}_s$ を以下のように展開する (図 1).

$$\mathbf{J}_S(\mathbf{r}') = \sum_{n'=1}^{N} I_n \mathbf{f}_{n'}(\mathbf{r}') \tag{4}$$

$$f_i(z) = \begin{cases} \frac{\sin k_0(z - z_{n-1})}{\sin k_0(z_n - z_{n-1})} & z_{n-1} \leqq z \leqq z_n \\ \frac{\sin k_0(z_{n+1} - z)}{\sin k_0(z_{n+1} - z_n)} & z_n \leqq z \leqq z_{n+1} \\ 0 & elsewhere \end{cases} \tag{5}$$

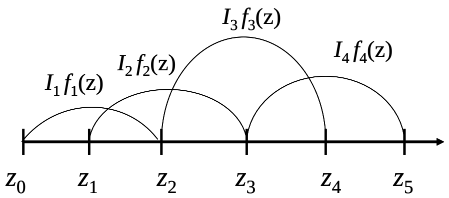

Figure 1　区分展開関数

ここで, N はセグメント数, I_n は未知の電流係数である. (5) 式は区分正弦関数と呼ばれ, 本研究で用いた展開関数である. 次に, (4) 式を (2) 式に代入し, 試行関数 (重み関数) を導入すると, (2) 式は以下の連立方程式に変形される.

$$\sum_{n'=1}^{N} Z_{nn'} I_{n'} = V_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N \tag{6}$$

ここで, V_n は電圧係数で, 入射電界 $\mathbf{E}^{inc}$ によって以下のように表現される.

$$V_n = \iint_S \mathbf{w}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \tag{7}$$

また, $Z_{nn'}$ は自己 (相互) インピーダンスを意味し, 以下の式で表現される.

$$Z_{nn'} = j\omega\mu_0 \iint_S \iint_S \mathbf{w}_n(\mathbf{r}) \cdot \overline{\overline{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_{n'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \tag{8}$$

(6) 式は, 以下のように行列方程式で表現できる.

$$[Z]\,[I] = [V] \tag{9}$$

ここで, $[Z]$ は $N \times N$ のインピーダンス行列, $[V]$ は既知の N 元電圧ベクトル, $[I]$ は未知の N 元電流ベクトルである. $[Z]$ の逆行列を求めれば, (2) 式の $\mathbf{J}_s$ を求めることができ, これより放射電磁界を求めることができる. 試行関数 $\mathbf{w}_n(\mathbf{r})$ と基底関数 $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ をともに区分正弦関数として解くモーメント法は Richmond のモーメント法と呼ばれ, 精度の高い結果が得られる. 本論文では, これ以降 Richmond のモーメント法を前提として議論する.

2. 2　CG 法 [6]

共役勾配 (CG) 法では, 以下の手順に従って $N \times N$ 連立方程式 $Za = b$ を解く.

- 初期値を a_0 とする.

$\mathbf{r}_0 = Za_0 - b$

$\mathbf{p}_1 = -Z^\dagger \mathbf{r}_0$

- 反復 $(i = 1, 2, \ldots)$

$\alpha_i = -\frac{\langle Z\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_{i-1}\rangle}{\|Z\mathbf{p}_i\|^2} = \frac{\|Z^\dagger \mathbf{r}_{i-1}\|^2}{\|Z\mathbf{p}_i\|^2}$

$a_i = a_{i-1} + \alpha_i \mathbf{p}_i$

$\mathbf{r}_i = Za_i - b = \mathbf{r}_{i-1} + \alpha_i Z\mathbf{p}_i$

$\beta_i = \frac{\|Z^\dagger \mathbf{r}_i\|^2}{\|Z^\dagger \mathbf{r}_{i-1}\|^2}$

$\mathbf{p}_{i+1} = -Z^\dagger \mathbf{r}_i + \beta_i \mathbf{p}_i$

ただし, $\mathbf{r}_i$ は残差ベクトル, $\mathbf{p}_i$ は解の修正ベクトル, α と β はそれぞれ解 a と $\mathbf{p}_i$ の修正係数である. 解の修正ベクトル $\mathbf{p}_{i+1}$ がそれまでの $\mathbf{p}_1$〜$\mathbf{p}_i$ と直交するように生成されるので, 数値誤差がなければ高々N 回の反復で残差 $\mathbf{p}_i$ が 0 になり, 解が得られる.

以上のプロセスの中で, 最も計算量が多い部分は行列-ベクトルの積 Za を計算することである. 特に未知数が多くなると, 計算時間とメモリは N^2 に比例して増大していく. そこで, 以下に示す FMM を適用して計算時間と必要なメモリを減らす.

2. 3　FMM [7]〜[10]

モーメント法に FMM を適用するために, 以下の図 2 に示すように, N 個のセグメント (未知数) を M 個のグループに分け, 各グループには K 個のセグメントが含まれているとする. 第 m グループ内の第 n セグメント (観測点) と第 m' グループ内の第 n' セグメント (波源) 間の相互インピーダンスは, セグメントが線状であると仮定すると, (8) 式を用いて以下のように与えられる.

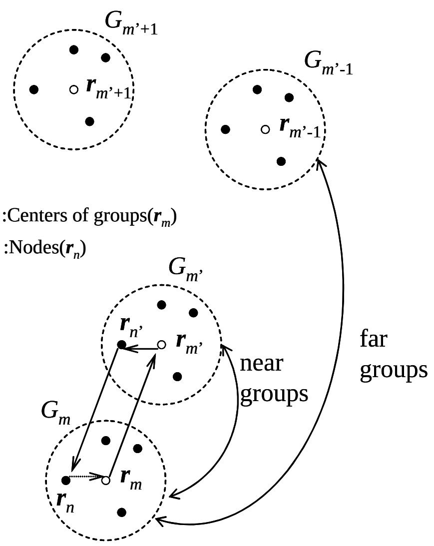

Figure 2　near グループと far グループ

$$Z_{mnm'n'} = j\omega\mu_0 \int_{l_{mn}} \mathbf{f}_{mn}(\mathbf{r}) \cdot \int_{l_{m'n'}} \overline{\overline{G}}_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_{m'n'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (10)$$

ここで, l_{mn} と $l_{m'n'}$ はそれぞれ観測点と波源のセグメントに沿う積分を表す．インピーダンスをグループ内及び隣接するグループに含まれるセグメント間のインピーダンス $Z^{near}_{mnm'n'}$ と離れたグループに含まれるセグメント間のインピーダンス $Z^{far}_{mnm'n'}$ に分けて考える (図 2 参照) と, 第 m グループ内の第 n セグメントの電圧係数は

$$V_{mn} = \sum_{m'=1}^{M}\sum_{n'=1}^{N} Z_{mnm'n'} I_{m'n'}$$

$$= \sum_{m'=1}^{M}\sum_{\substack{n'=1 \\ (m,m')=near}}^{N} Z^{near}_{mnm'n'} I_{m'n'} + \sum_{m'=1}^{M}\sum_{\substack{n'=1 \\ (m,m')=far}}^{N} Z^{far}_{mnm'n'} I_{m'n'} \quad (11)$$

$$(m = 1, 2, \ldots, M, \quad n = 1, 2, \ldots, N)$$

となる．FMM をこのうちの $Z^{far}_{mnm'n'}$ に適用して高速化とメモリ低減を図る．$Z^{near}_{mnm'n'}$ は従来の方法で計算する．

Gegenbauer の加法定理 (図 3 参照) を使用すると, スカラーグリーン関数は球面関数を用いて以下のように展開 (球面多重極子展開) できる．(ただし, $\mathbf{r} \geqq \mathbf{d}$)

$$\frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}+\mathbf{d}|}}{4\pi|\mathbf{r}+\mathbf{d}|}$$

$$= \frac{-jk_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(2l+1)j_l(k_0d)h_l^{(2)}(k_0r)P_l(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) \quad (12)$$

ここで, j_l は第 1 種球ベッセル関数, $h_l{}^{(2)}$ は第 2 種球ハンケル関数, P_l はルジャンドル多項式である．

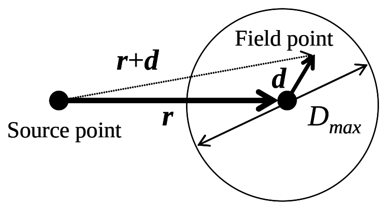

Figure 3　Gegenbauer の加法定理

(12) 式中の $j_l(k_0d)\times P_l(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{r}})$ を平面波展開すると,

$$j_l(k_0d)P_l(\hat{\mathbf{d}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi(-j)^l}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_l(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}})e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}}\sin\theta d\theta d\phi \quad (13)$$

となるので, これを (12) 式に代入すると,

$$\frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}+\mathbf{d}|}}{4\pi|\mathbf{r}+\mathbf{d}|} = \frac{-jk_0}{(4\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} T_L(k_0r, \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}})e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}}\sin\theta d\theta d\phi \quad (14)$$

となる．ここで $T_L(k_0r, \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}})$ は

$$T_L(k_0r, \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{l=0}^{L}(-j)^l(2l+1)h_l^{(2)}(k_0r)P_l(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) \quad (15)$$

である．(15) 式では数値計算の都合上, 級数の上限を有限の値 L で打ち切っている．ゆえに, (14) 式はスカラーグリーン関数の近似表現となる．以上の関係を $\mathbf{r}_n$ から $\mathbf{r}_{n'}$ への球面波に適用すると, グリーン関数は

$$\frac{\mathrm{e}^{-jk_0|\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'}|}}{4\pi|\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{n'}|} \approx \frac{-jk_0}{(4\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_{nm}}$$
$$\times T_L(k_0r_{mm'}, \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_{mm'})e^{j\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_{n'm'}}\sin\theta d\theta d\phi \quad (16)$$

となる．これを (10) 式に適用すると, インピーダンス $Z^{far}_{mnm'n'}$ は以下のようになる．

$$Z^{far}_{mnm'n'} \approx \frac{\omega\mu_0 k_0}{(4\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathbf{S}_{mn}(\hat{\mathbf{k}})$$
$$\cdot T_L(k_0r_{mm'}, \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_{mm'})\mathbf{S}^*_{m'n'}(\hat{\mathbf{k}})\sin\theta d\theta d\phi \quad (17)$$

ここで, $\mathbf{S}_{mn}$ $(\hat{\mathbf{k}})$, $\mathbf{S}_{m'n'}$ $(\hat{\mathbf{k}})$ は

$$\mathbf{S}_{mn}(\hat{\mathbf{k}}) = \int_{l_{mn}} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{mn}}(\overline{\overline{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{f}_{mn}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (18)$$

$$\mathbf{S}_{m'n'}(\hat{\mathbf{k}}) = \int_{l_{m'n'}} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{m'n'}}(\overline{\overline{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{f}_{m'n'}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (19)$$

である．図 4 から分かるように, FMM を用いると, インピーダンスはグループ間の相互作用 T_L とセグメント所属グループ中心との相互作用 $\mathbf{S}_{mn}$ $(\hat{\mathbf{k}})$, $\mathbf{S}_{m'n'}$ $(\hat{\mathbf{k}})$ から求められる．これによりインピーダンス計算を大幅に高速化できるようになる．例えばセグメント数が 30 である場合, インピーダンスを従来の方法で算出する場合は, 30 × 30=900 回の計算が必要である．一方で 30 セグメントを 2 グループに分けた後に (17) 式を適用すると, 各グループ内のセグメントとグループ中心の相互作用算出の 2 × 15 回の計算とグループ間の相互作用 1 回の計算, 即ち 31 回の計算で済む．

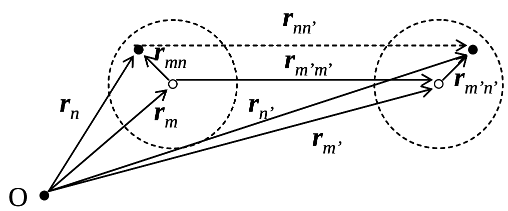

Figure 4　高速多重極法でのベクトルの定義

(11) 式, (17) 式から分かるように, FMM を用いたインピーダンス計算は, $Z^{near}_{mnm'n'}$ の算出, $\mathbf{S}_{mn}$ $(\hat{\mathbf{k}})$ の算出, T_L の算出, 及び $\mathbf{S}_{m'n'}$ $(\hat{\mathbf{k}})$ の算出の 4 ステップに分けられる．各ステップの計算量はそれぞれ,$O(N^2/M)$, $O(N\times 2L^2)$, $O(M^2\times 2L^2)$, 及び $O(N\times 2L^2)$ となる．L は (15) 式で示した級数の上限であるが, (17) 式の積分を行う際の分点数も L を用いて定めるものとする．L は経験的に以下の式から算出される．

$$L = k_0 D_{\max} + \alpha_L \ln(k_0 D_{\max} + \pi) \quad (20)$$

ここで, D_{max}はグループ直径の最大値であり,α_L は積分の精度を左右する値で必要に応じて自由に設定してよいが, 通常 1〜10 の値を取る．例えば平面アレーアンテナの場合は $L^2 \propto N/M$ となるので, インピーダンスを計算する全ステップの計算量は $O(N^2/M{+}NM)$ となる.ここで,$M = \sqrt{N}$となるようにグループ数Mを選ぶと,計算時間は最小値$O(N^{1.5})$ となり, CG 法より高速化される．

FMM の各ステップでの計算は以下のようになる．

step1. aggregation step

波源グループ内の波源と波源のグループ中心までの相互作用を計算する．($G_{m'}$ は波源グループ)

$$\mathbf{S}_{m'}(\hat{\mathbf{k}}_{\theta\varphi}) = \sum_{n'\in G_{m'}} S^{*}_{n'm'}(\hat{\mathbf{k}}_{\theta\varphi})a_{n'} \tag{21}$$

step2. translation step

波源グループと観測グループ間の相互作用を計算する．(F_m は観測グループ)

$$\mathbf{S}_{mm'}(\hat{\mathbf{k}}_{\theta\varphi}) = \sum_{m\in F_m} T_L(k_{\theta\varphi}r_{mm'}, \hat{\mathbf{k}}_{\theta\varphi}\cdot\hat{\mathbf{r}}_{mm'})S_{m'}(\hat{\mathbf{k}}_{\theta\varphi}) \tag{22}$$

step3. disaggregation step

観測点グループの中心から，各観測点までの相互作用を計算する．($w(\theta)$ は θ方向のガウス積分の重み)

$$\begin{aligned}\sum_{n'} Z^{far}_{nn'}a_{n'} \approx \tfrac{\omega\mu_0 k_0}{(4\pi)^2}\sum_{\theta=1}^{L}\sum_{\varphi=1}^{2L} w(\theta)\tfrac{\pi}{L}\\ \times\left[\mathbf{S}_{mm'}(\hat{\mathbf{k}}_{\theta\varphi})\cdot\mathbf{S}_{nm}(\hat{\mathbf{k}}_{\theta\varphi})\right]\end{aligned} \tag{23}$$

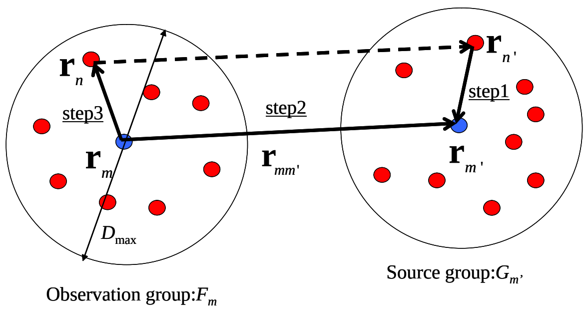

Figure 5　FMM の計算手順

3. CG 法及び FMM の収束性の検討

3.1 解析モデル

CG 法及び FMM の収束性に関して，以下の 2 つのモデルでそれぞれ検討を行った．なお，以下のグラフや文中では長さや座標などは波長で規格化されている．

(1) 平行半波長ダイポールアンテナ

図 6 に示すような，互いに平行な 2 本の半波長ダイポールアンテナの相互インピーダンスを FMM を用いて求め，モーメント法で直接求めた値と比較検討した．各ダイポールアンテナは 3 セグメントに分割されている．

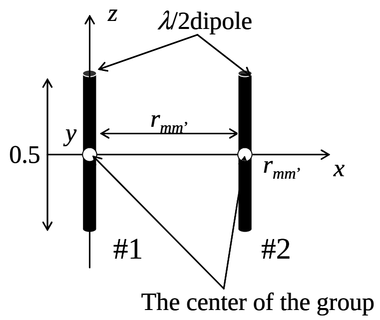

Figure 6　平行半波長ダイポールアンテナ (モデル 1)

(2) 平行半波長ダイポールアレー

モデル 1 を素子数 J 本のアレーにしたもので，各素子の入力インピーダンスを CG 法とガウス消去法によって計算し，CG 法の収束性を検討した．

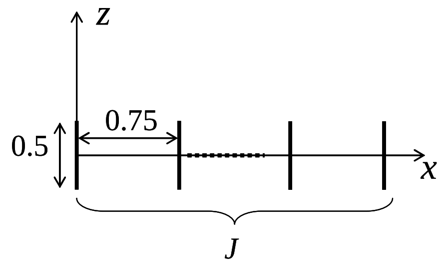

Figure 7　平行半波長ダイポールアレー (モデル 2)

3.2 FMM の収束性の検討

モデル 1 に関して，ダイポール間の距離 $r_{mm'}$ を変化させ，各ダイポールを 1 つのグループとみなして FMM を用い，相互インピーダンスを計算した．$D_{max} = 0.5$ であり,α_L=2 と設定して (20) 式から得られた L=7 を級数 (15) 式の上限とし，積分点数もこれを用いて定めた．結果は図 8 のようになった．$r_{mm'}$ が小さいとき，すなわちグループ同士が近接しているときは比較的精度が低下するが，グループ同士が離れると精度が上昇してゆくことが分かる．

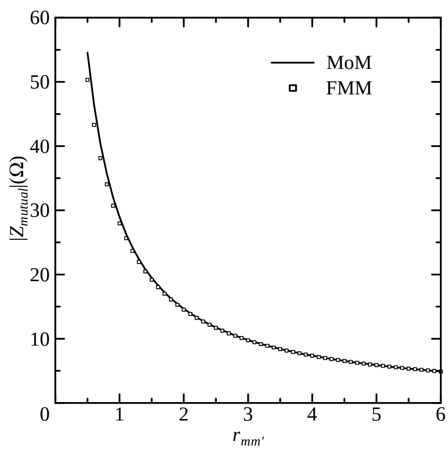

Figure 8　FMM による相互インピーダンスの計算

次に，α_L を変えたときに精度がどう変化するかを確認した．結果は以下で定義する誤差率を用いて表現した．

$$Error\quad rate = \frac{|Z_{MoM} - Z_{FMM}|}{|Z_{MoM}|}\times 100(\%) \tag{24}$$

図 9 から分かるように，L を変化させると収束性が変化したが，L を増やしても良くはならなかった．むしろ L=0 の時に最も収束性がよいという結果となった．これは今回考慮したモデルが，向きも大きさも同じ 1 対のダイポールアンテナであるというモデルの特殊性によるものではないかと考えられるため，今後違うモデルに対する検討をする必要がある．

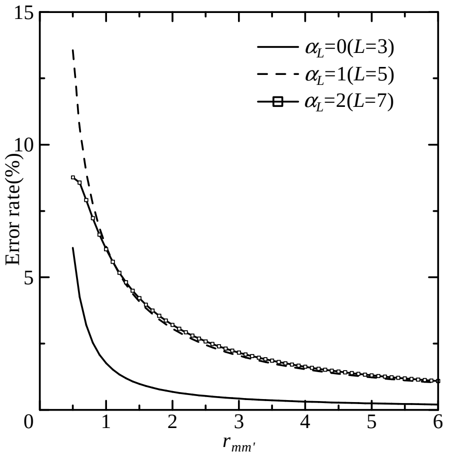

Figure 9　α_L による収束性の変化

3. 3　CG 法の収束性の検討

モデル 2 に対して MoM を適用して得た行列方程式を CG 法によって解き, ガウス消去法を用いて解いた場合と比較してその収束性を確かめた. 素子数 J を変化させ, それに応じたセグメント数 $N(=3J)$ の増加に対して, 収束に必要な CG 法の反復回数 N' を検討した. N' を検討する際に, 以下に定義する最悪誤差率を用いた.

$$E_i = \frac{|Z_i^{MoM} - Z_i^{FMM}|}{|Z_i^{MoM}|} \times 100(\%)$$
$$Worst \quad error \quad rate = \max\{E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots, E_J\} \quad (i = 1, 2, \ldots, J) \tag{25}$$

図 10 の結果からモデル 2 に対しては, 収束に必要な CG 法の反復回数 N' がセグメント数によらず 10〜20 程度で十分であることが分かる. これは, インピーダンス行列 $[Z]$ の対角成分が非対角成分に比べて十分に大きい（対角優位行列）ことによるものだと考えられる.

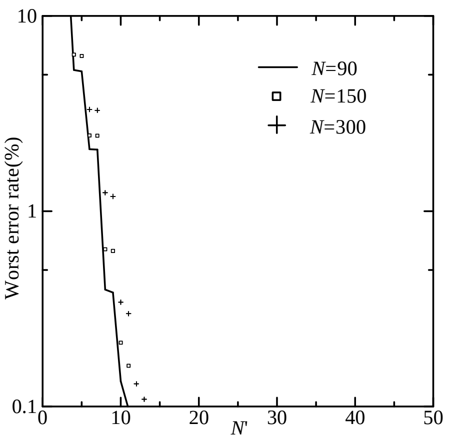

Figure 10　N' による収束性の変化

4.　CG-FMM 法の収束性及び計算時間の検討

モデル 2 に対して CG-FMM 法を適用し, 各素子の入力インピーダンスを求めた. その際各ダイポールを 1 グループと定め, 隣接するグループを near グループとして相互作用を直接計算し, それ以外のグループを far グループとして相互作用を FMM でまとめて計算した. なお, 計算時間の検討に用いた PC の性能は以下の通り.

PC: Hewlett-Packerd workstation xw8200
CPU: Intel(R) Xeon(TM) 2.8GHz × 2
メモリ: 2GB

4. 1　収束性の検討

3.2 と 3.3 から, CG-FMM 法をモデル 2 に適用する際に, 収束性に関わる諸元を以下の表 1 のように定めた.

Table 1　CG-FMM 法の諸元

諸元	設定値
L((15) 式の上限)	3
NF(=2L, (17) 式の φ 方向積分点数)	6
NT(=L, (17) 式の θ 方向積分点数)	3
N' (CG 法の反復回数)	20

以上の諸言において, モデル 2 の素子数 J を 30 として各素子の入力インピーダンスの収束性を確かめた. 結果は図 11 のようになった. 図 11 から, CG-FMM 法を用いてかなり精度よく各素子の入力インピーダンスが得られていることが分かる.

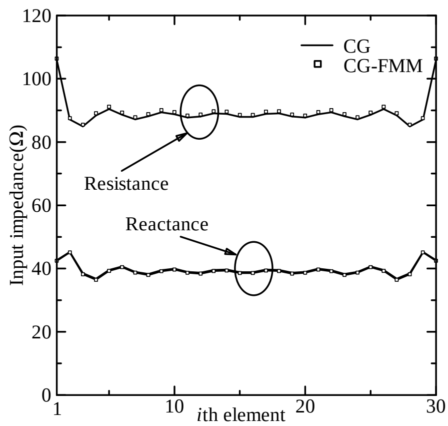

Figure 11　CG-FMM 法の収束性

4. 2　計算時間の検討

素子数 J を 10〜1000 まで, すなわちセグメント数 N を 30〜3000 まで変化させて計算時間の検討を行った. 表 2 及び図 12 から分かるように, ガウス消去法や CG 法と比較すると, CG-FMM 法はセグメント数 N の変化に対して計算時間の増加がかなり緩やかであり, $O(N)$ 程度の計算量になっていると言える.

Table 2　セグメント数 N と各手法の計算時間の関係

セグメント数	計算時間 (sec)		
N	ガウス消去法	CG 法	CG-FMM 法
30	3.1×10^{-2}	3.1×10^{-2}	4.7×10^{-1}
300	3.4	2.5	5.2
3000	2.1×10^{3}	2.6×10^{2}	7.9×10^{1}

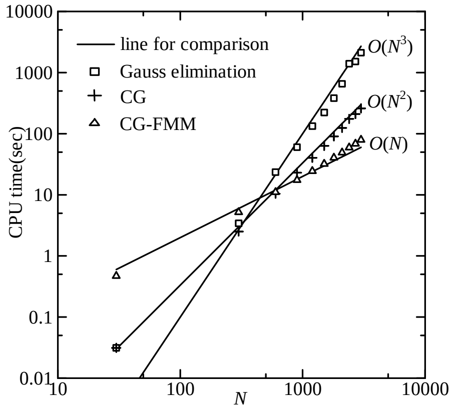

Figure 12　各手法の計算時間の比較

ガウス消去法は, N が $30 \rightarrow 300 \rightarrow 3000$ と 10 倍ずつ増加するにつれて計算時間がおよそ 100 倍, 700 倍と増加しており, 巨大な N に対してはおよそ $O(N^3)$ の計算時間がかかったことが分かる．また CG 法は N が $30 \rightarrow 300 \rightarrow 3000$ と 10 倍ずつ増加すると, 計算時間はおよそ 80 倍, 100 倍と増加しており $O(N^2)$ の計算時間を要したことが分かる．一方で CG-FMM 法では, N が小さいときはまとめられるセグメント数が少ないのと, 級数の上限 L や積分点数が N と比較して無視できない大きさであったため, 他の 2 手法に比べて計算が遅かった．しかし, N が $30 \rightarrow 300 \rightarrow 3000$ と 10 倍ずつ増加しても, 計算時間はおよそ 10 倍, 14 倍に増加したにとどまっており, 計算時間の増加率は全手法中最も小さかった.

2.3 で述べたとおり, FMM を用いたとき, グループ数 $M = \sqrt{N}$ と最適に設定して得られるオーダーが $O(N^{1.5})$ である．そのオーダーだと N が 10 倍になると計算時間は 30 倍程度になるはずだが, 今回の結果はグループ分けが最適でないにもかかわらず, 計算時間の増加はそれよりも緩やかな 10〜14 倍程度であり, $O(N^{1.5})$ よりも小さい $O(N)$ 程度であった. その原因は, FMM を適用した効果に加えてモデルが周期性を持っており, (15) 式の級数 T_L と (18) 式の $\mathbf{S}_{mn}$ がグループによらずに計算できたことが考えられる.

5.　まとめ及び今後の課題

今回は, アンテナの電磁界数値解析に用いられる Richmond のモーメント法に, CG 法と FMM を用いることで計算時間の削減を図るとともに精度についても検討した．その結果, CG-FMM 法を用いるとモーメント法で直接計算して得られた解に匹敵する高精度の解が高速で得られることが分かった.

今後は, アレー以外にも長いダイポールアンテナのモデルや周期性のないモデルも解析対象として取り扱い検討すると共に, 今回以上にセグメント数の大きい問題に関しても検討したい.

References

[1] R. F. Harrington, Field computation by moment method, IEEE Press, New York, 1993.

[2] R. Coifuman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription," IEEE Antennas and Propagat. Mag. Vol. 35, No.3, pp. 7-12, June. 1993.

[3] 瀬在 俊浩, 久田 安正 ザイ フイチン, 陳 強, 澤谷 邦男 "CG-FMM-FFT 法によるモーメント法の高速化・メモリ低減化" 宇宙太陽発電時限研究専門委員会研究会, SPS2007-5, July. 2007

[4] J. H. Richmond and N. H. Greay, "Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles," IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 23, No.5, pp. 412-414, May. 1975.

[5] C. T. Tai, Dyadic Green Function in Electromagnetic Theory. New York: IEEE, 1994.

[6] M. R. Hestenes and E. Stiefel, "Methods of Conjugate gradients for Solving Linear systems," J.Res. Nat. Bur. Standards. Vol. 49, No.6, pp. 409-436, Dec. 1952.

[7] V. Rokhlin, "Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimension," J. Comput. Phys., Vol. 86, No.2, pp. 414-439, Feb. 1990.

[8] J. M. Song and W. C. Chew, "Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering, " Microwave Opt. Technol. Lett., Vol. 10, No.1, pp. 14-19, Sept. 1995.

[9] Kubilay Sertel, "Multilevel fast multipole method for modeling permeable structures using conformal finite elements," P. h. D. thesis, University of Michigan, USA, 2003.

[10] M. Abramowitz and I. A. Stegum, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, 1972.