

分極電流ガラキンモーメント法における平行配置直角三角柱セグメント間インピーダンスの単積分化に関する検討

吉川 幸広^{†a)} 陳 強^{††}

Study of the One-Dimensional Integral Impedance Expression between Parallel Two Right-Angled Triangular Prisms on the Polarization Current Galerkin's Moment Method

Yukihiro YOSHIKAWA^{†a)} and Qiang CHEN^{††}

あらまし 2 個の直角三角柱誘電体セルが三角形の端面を介して構成されるダイポールセグメント、あるいは誘電体端部に設けられ、三角形を端面とする 1 個の直角三角柱誘電体セルから構成されるモノポールセグメントが、平行かつ任意に配置された 2 組の柱状セグメント間に、分極電流を用いたガラキンモーメント法を採用して得られる自己・相互インピーダンスの 6 重積分式が、特異点を除去した単積分表現式のと和で表されることを示している。セグメントの柱状電流は正弦関数を用いている。数値比較検討は SS 法 (Singularity Subtraction Method) 及び直接積分法とで行い、本解析法の妥当性、有効性の範囲を得ている。

キーワード 直角三角柱, ガラキンモーメント法, 分極電流, 正弦電流, 単積分, 平行柱状セグメント

1. ま え が き

筆者らのグループは誘電体を含むアンテナ、散乱問題について、誘電体を直方体で分割した分極電流で表し、電界型積分方程式にガラキンモーメント法を適用した解析について報告している [1]~[5]。その中で、区分的分極電流展開関数を用いた部分領域モーメント法解析について、自己・相互インピーダンス表現式を単積分化できることを報告し [3]~[5]、その妥当性を実験により確認している [6]。しかしながら、任意のアンテナ構成には対応できないという弱点があった。

任意のアンテナ構成を解析する方法として、導体の電流関数として RWG (Rao-Wilton-Glisson) 関数 [7] を用い、導体の分割に合わせて誘電体を四面体で分割する手法 [8]~[10] や三角柱で分割する手法 [11] がある。四面体分割では、電束密度または分極電流を SWG (Schaubert-Wilton-Glisson) 関数 [8] で展開して

り、任意の誘電体形状に対応可能な利点がある。三角柱分割は板状誘電体に適用され、水平成分の電束密度は縦方向が均一な RWG 関数、垂直成分の電束密度は断面方向が均一な三角形関数で展開している。しかしながら、いずれもベクトル・スカラーポテンシャルの解析は分割領域が十分小さい場合に適用できる近似的手法であり、精度の点で問題があると考えられる。

筆者らは多数の平面アンテナに対応できるように、誘電体については断面が直角三角形の三角柱モデル、導体については直角三角形モデルを追加したガラキンモーメント法解析を実施中である。その際、インピーダンス行列要素を近似表現することなく、解析的に低次元化 (必要性が高い場合に単積分化) を行っている。導体間のインピーダンス行列要素の単積分化については報告済みである [12]。この結果を利用して誘電体の直角三角柱モデルの柱軸と直交する方向のセグメント間のインピーダンス行列要素の一部は容易に得られるが、自由空間との境界を含むセグメントの場合には境界上の電界法線成分の不連続を考慮する必要がある。今回の報告以外の直角三角柱モデルについての低次元化に関する検討結果は、別途報告する予定である。今回、2 組の平行柱状セグメント間の自己・相互インピーダンスの単積分化に関する検討内容を報告す

[†] 横浜市

Yokohama-shi, 244-0002 Japan

^{††} 東北大学大学院工学研究科通信工学専攻, 仙台市

Communication Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University, Aramaki Aza Aoba, 6-6-05, Aoba-ku, Sendai-shi, 980-8579 Japan

a) E-mail: yy-yottchi@r5.dion.ne.jp

DOI:10.14923/transcomj.2021JBP3033

る。柱軸方向の電流は文献 [3], [13] と同様に正弦関数とした。正弦関数の利点は三角形関数と比べ、セグメントの長さを長くとることが可能とともに、長手方向の積分を比較的容易に特殊関数で解析的に表示できる利点があるが、励振点と観測点が一致する場合以外に、観測点が電流軸上にある場合にも特異点を有し、下記に示すようにその除去についての検討も必要となるという弱点がある。電流軸方向の積分は純虚数変数の積分指数関数に相当する関数 F [3], [13] を用いて表されるので、各セルの端部三角形間の 4 重積分を解析的に単積分化した。単積分化により特異点を除去した形での式となるので、セルを共有あるいは近接したセグメント間の自己・相互インピーダンスの計算精度向上及び計算時間の短縮化が期待できる。次に、関数 F の 4 重積分について、SS 法 (Singularity Subtraction Method) [14], [15] を用いた計算結果、及び直接数値積分する DI 法 (Direct Integral Method) を用いた計算結果との比較検討し、本解析法の妥当性、有効性の範囲を確認する。尚、直角三角形に関するパラメータ及び使用コンピュータは文献 [12] と同一であり、詳細な説明は省略する。

2. 自己・相互インピーダンスの単積分化

2.1 基本式の導出

セグメント構成を図 1 に示す。セグメントは図 1 (a) に示すように 2 個の直角三角柱モノポールセルから構成されるダイポールセグメントと、図 1 (b) に示すように端部が自由空間と接する場合に用いられ、1 個の直角三角柱モノポールセルから構成されるモノポールセグメントに分類される。

分極電流を用いたガラキーンモーメント法では、それぞれ、 u_M , u_N 方向に電流ベクトルをもつ M , N セグメント間のインピーダンス要素は、電流展開関数を

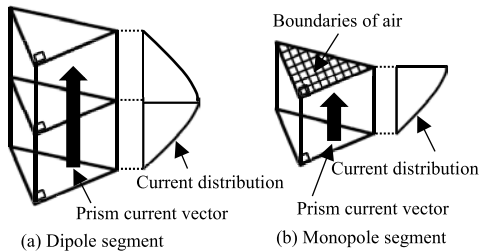


図 1 セグメント構成
Fig. 1 Configuration of segment.

J_M , J_N , 単位ベクトルを \hat{u}_M , \hat{u}_N , 体積要素を V_M , V_N とした場合、一般に次式で表される。

$$Z_{MN} = \frac{jkZ_0}{4\pi} \iiint_{V_M} \iiint_{V_N} J_M(\mathbf{r})J_N(\mathbf{r}') \times \left\{ (\hat{u}_M \cdot \hat{u}_N) - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial u_M \partial u_N} \right\} \frac{e^{-jkR}}{R} dV' dV + \frac{1}{jkY_0\tau} \iiint_{V_M} (\hat{u}_M \cdot \hat{u}_N) J_M(\mathbf{r})J_N(\mathbf{r}) dV \quad (1)$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (2)$$

ここで、 k , Z_0 , Y_0 はそれぞれ、自由空間における波数、波動インピーダンス、波動アドミタンスである。また、パラメータ τ は複素電気感受率であり、複素比誘電率 ϵ_r^* を用いて次式で表される。

$$\tau = \epsilon_r^* - 1 \quad (3)$$

式 (1) の第二項の積分はセグメントのモノポールセルが重複する場合にのみ値をもち、文献 [3] に導出されている。

式 (1) の第一項の積分をモノポールセル間の積分に分割して求める。モノポールセル間の座標系の一例を図 2 に示す。電流軸は平行なので、 $\hat{z} \cdot \hat{t} = \pm 1$ である。原点間の距離ベクトル \mathbf{R}_a を

$$\mathbf{R}_a = x_a \hat{x} + y_a \hat{y} + z_a \hat{z} \quad (4)$$

とおき、任意の座標間の距離ベクトル \mathbf{R} を以下の式で表す [13]。

$$\mathbf{R} = D_x \hat{x} + D_y \hat{y} + D_z \hat{z} = -(D_r \hat{r} + D_s \hat{s} + D_t \hat{t}) \quad (5)$$

電流関数を以下の式で表す。

$$J_M^\mu = \frac{(-1)^{\mu+1}}{S_M \sin kL_M^\mu} \sin k(z - z_\mu) \quad (6)$$

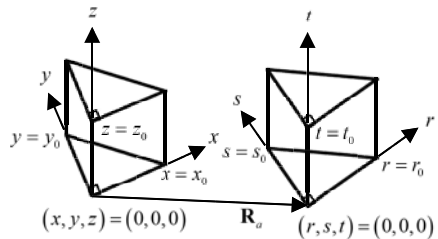


図 2 モノポールセル間の座標系
Fig. 2 Coordinate system between monopole cells.

$$J_N^y = \frac{(-1)^{\nu+1}}{S_N \sin k L_N^y} \sin k(t - t_\nu) \quad (7)$$

ここで、 μ, ν はそれぞれ、1 または 2 の値をとり、 $z_\mu, t_\nu, L_M^\mu, L_N^\nu$ は以下の式となる。

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, & z_2 &= z_0 \\ t_1 &= 0, & t_2 &= t_0 \\ L_M^\mu &= z_2 - z_1, & L_N^\nu &= t_2 - t_1 \end{aligned} \quad (8)$$

また、 S_M, S_N は断面積を示す。

モノポールモードセル間の式 (1) の第一項を $\bar{Z}_{MN}^{\mu\nu}$ とおいたとき、 $\bar{Z}_{MN}^{\mu\nu}$ は次式で表される [5]。

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{MN}^{\mu\nu} &= \frac{Z_0}{16\pi} \frac{(-1)^{\mu+\nu+1}}{S_M S_N} \iint_{S_M} \iint_{S_N} \left\{ \frac{1}{\sin k L_M^\mu \sin k L_N^\nu} \right. \\ &\quad \times \sum_{p,q} p q e^{-jk(pz_\mu + qt_\nu)} \sum_{m,n} (-1)^{m+n} e^{jk(pz_m + qt_n)} I_{mn} \\ &\quad \left. + \frac{4j}{k} \frac{e^{-jkR_{\mu'\nu'}}}{R_{\mu'\nu'}} \right\} dS_N dS_M \end{aligned} \quad (9)$$

$$I_{mn} = [2e^{jp_k D_z} F(R_{mn} + pD_z)]_{\eta=0} \quad (10)$$

ここで、 p, q はそれぞれ、1 及び -1 の値、 m, n はそれぞれ、1 及び 2 の値をとる。 μ', ν' はそれぞれ、 μ, ν が 1 のとき 2、2 のとき 1 となる値である。また、式 (10) の $[\]_{\eta=0}$ は $\eta = 1 + pqz \cdot \hat{t} = 0$ となる p, q の値をとることを示す。関数 F は以下の式で表される。

$$F(R_{mn} + pD_z) = - \int_{R_{mn} + pD_z}^{\infty} \frac{e^{-jk w}}{w} dw \quad (11)$$

式 (9) の $\{ \}$ 内第二項はモノポールセグメント同士の場合のみに必要な項であり、その単積分化は文献 [12] に示されている。

2.2 インピーダンス要素の単積分化

以下の 4 重積分の単積分化を行う。

$$I_1 = \int_0^{x_0} \int_0^{y(x)} \int_0^{r_0} \int_0^{s(r)} 2e^{jp_k D_z} F(R + pD_z) ds dr dy dx \quad (12)$$

最初に、 (r, s) に対する面積分を J_1 とおき、 J_1 の単積分化を行う。変数変換

$$u = -D_r, \quad v = -D_s \quad (13)$$

を行い、 R を u, v の関数として表し、単積分化する。

文献 [12] と同様の手法により、 J_1 は次式で表される。

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2(u)} 2e^{jp_k D_z} F(R(u, v) + pD_z) dv du \\ &= - \sum_{h=1}^2 (-1)^h \{ v_2^2(u_h) e^{jp_k D_z} F(R(u_h, v_2(u_h)) + pD_z) / \beta_1 \\ &\quad + 2v_1 u_h e^{jp_k D_z} F(R(u_h, v_1) + pD_z) \} \\ &\quad - K_t^{(\beta)} \int_{v_1}^{v_1+s_0} \frac{u_t v^2}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(u_t, v)}}{R} dv \\ &\quad + \int_{u_1}^{u_2} \frac{v_1 u^2}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(u, v_1)}}{R} du \\ &\quad + \frac{1}{\beta_1} \int_{u_1}^{u_2} v_2(0) \frac{v_2(u) [u - \beta_1 v_2(u)]}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(u, v_2(u))}}{R} du \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \left\{ - \sum_{h=1}^2 (-1)^h K_t^{(\beta)} \operatorname{sgn}^2(u_h) [1 - \operatorname{sgn}^2(v_2(0))] \right. \\ &\quad \times \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \beta_1^2}} \right) \right] [1 + jk(|D_z| - pD_z)] e^{-jk|D_z|} \\ &\quad + \sum_{h=1}^2 (-1)^h \operatorname{sgn}(u_h) [\operatorname{sgn}(v_1) - \operatorname{sgn}(v_2(0))] \frac{\pi}{2} \\ &\quad \times [1 + jk(|D_z| - pD_z)] e^{-jk|D_z|} \\ &\quad + K_t^{(\beta)} \int_{v_1}^{v_1+s_0} u_t \left[\frac{1}{R^2 - D_z^2} + jk \frac{1}{R + pD_z} \right] e^{-jkR(u_t, v)} dv \\ &\quad - \int_{u_1}^{u_2} v_1 \left[\frac{1}{R^2 - D_z^2} + jk \frac{1}{R + pD_z} \right] e^{-jkR(u, v_1)} du \\ &\quad \left. + \int_{u_1}^{u_2} v_2(0) \left[\frac{1}{R^2 - D_z^2} + jk \frac{1}{R + pD_z} \right] e^{-jkR(u, v_2(u))} du \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\beta_1, K_t^{(\beta)}$ は、 (r, s) 面方向の電流セグメントを考慮した場合の座標原点の変更に伴う直角三角形セルの斜辺形状パラメータであり、その定義は文献 [12] の図 2、式 (5)、(6) に示されている。

次に、 (x, y) についての積分を変数変換

$$X = -D_x, \quad Y = -D_y \quad (15)$$

を用い、 R を X, Y の関数に置き換えて行う。式 (14) の $(1/k^2)\{ \}$ 内の第一項、第二項及び第三項～第五項の最初の積分は文献 [12] の式 (20) の積分に相当し、導出済みである。残りの項の積分を求める際に必要な (X, Y) に対する各種面積分は以下の式である。

$$\Phi_1 = \int_{X_1}^{X_2} \int_{Y_1}^{Y_2(X)} X^2 f_1(X, Y) dY dX \quad (16)$$

$$\Phi_2 = \int_{X_1}^{X_2} \int_{Y_1}^{Y_2(X)} Y^2 f_1(X, Y) dY dX \quad (17)$$

$$\Phi_3 = \int_{X_1}^{X_2} \int_{Y_1}^{Y_2(X)} 2XY f_1(X, Y) dY dX \quad (18)$$

$$f_1(X, Y) = e^{jp_k D_z} F(R(X, Y) + pD_z) \quad (19)$$

$$\Theta_{ab} = \int_{X_1}^{X_2} \int_{Y_1}^{Y_2(X)} \frac{X^a Y^b}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X, Y)}}{R} dY dX \quad (20)$$

$$(a, b) = \begin{cases} (3, 0), & (2, 1) \\ (1, 2), & (0, 3) \end{cases} \quad (21)$$

$$\Psi_1 = \int_{X_1}^{X_2} \int_{Y_1}^{Y_2(X)} \frac{X}{R + pD_z} e^{-jkR(X, Y)} dY dX \quad (22)$$

$$\Psi_2 = \int_{X_1}^{X_2} \int_{Y_1}^{Y_2(X)} \frac{Y}{R + pD_z} e^{-jkR(X, Y)} dY dX \quad (23)$$

上記の積分は、文献[12]の図2、式(5)、(6)に示されているように、 (x, y) 面方向の電流セグメントを考慮した場合の座標原点の変更に伴う直角三角形セルの斜辺形状パラメータ α_1 、 $K_t^{(\alpha)}$ を用いて、 (u, v) に対する積分と同様の手法で以下の式で表される。

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \sum_{l=1}^2 (-1)^l \left[-\frac{\alpha_1}{4} X_l^4 + \frac{Y_2(0)}{3} X_l^3 \right] f_1(X_l, Y_2(X_l)) \\ & - \int_{X_1}^{X_2} \left[-\frac{\alpha_1}{4} X^4 + \frac{Y_2(0)}{3} X^3 \right] \frac{X - \alpha_1 Y_2(X)}{R + pD_z} \\ & \times \frac{e^{-jkR(X, Y_2(X))}}{R} dX \\ & - \frac{1}{3} \sum_{l=1}^2 (-1)^l Y_1 X_l^3 f_1(X_l, Y_1) \\ & + \frac{1}{3} \int_{X_1}^{X_2} \frac{X^4}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X, Y_1)}}{R} dX - J_A - J_B \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & -\frac{1}{12\alpha_1} \sum_{l=1}^2 (-1)^l Y_2^4(X_l) f_1(X_l, Y_2(X_l)) \\ & + \frac{1}{12\alpha_1} \int_{X_1}^{X_2} Y_2^4(X) \frac{X - \alpha_1 Y_2(X)}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X, Y_1)}}{R} dX \\ & - \frac{1}{3} \sum_{l=1}^2 (-1)^l Y_1^3 X_l f_1(X_l, Y_1) \\ & + \frac{1}{3} \int_{X_1}^{X_2} \frac{Y_1^3 X^2}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X, Y_1)}}{R} dX + \frac{1}{3} J_A - J_B \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & -\frac{1}{3\alpha_1} \sum_{l=1}^2 (-1)^l Y_2^3(X_l) \left[X_l + \frac{1}{4\alpha_1} Y_2(X_l) \right] \\ & \times f_1(X_l, Y_2(X_l)) \\ & + \frac{1}{3\alpha_1} \int_{X_1}^{X_2} Y_2^3(X) \left[X_l + \frac{1}{4\alpha_1} Y_2(X_l) \right] \\ & \times \frac{X - \alpha_1 Y_2(X)}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X, Y_2(X))}}{R} dX \\ & - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 (-1)^l Y_1^2 (X_l^2 + Y_1^2) f_1(X_l, Y_1) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 (-1)^l \frac{Y_1^2}{k^2} f_2(X_l, Y_1) - J_C \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} J_A = & \frac{1}{4} \left\{ -K_t^{(\alpha)} \int_{Y_1}^{Y_1+Y_0} \frac{X_t Y^4}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X_t, Y)}}{R} dY \right. \\ & - \int_{X_1}^{X_2} \frac{Y_1^3 X^2}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X, Y_1)}}{R} dX \\ & \left. + \int_{X_1}^{X_2} \frac{X Y_2^3(X) [X - \alpha_1 Y_2(X)]}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X, Y_2(X))}}{R} dX \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} J_B = & \frac{1}{4k^2} \left\{ \int_{X_1}^{X_2} Y_2(X) f_2(X, Y_2(X)) dX \right. \\ & \left. - \int_{X_1}^{X_2} Y_1 f_2(X, Y_1) dX \right\} \\ & + \frac{1}{4k^4} \left\{ \sum_{l=1}^2 (-1)^l K_t^{(\alpha)} \operatorname{sgn}^2(X_l) [1 - \operatorname{sgn}^2(Y_2(0))] \right. \\ & \times \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} \right) \right] f_3(|D_z|) \\ & - \sum_{l=1}^2 (-1)^l \operatorname{sgn}(X_l) [\operatorname{sgn}(Y_1) - \operatorname{sgn}(Y_2(0))] \\ & \times \frac{\pi}{2} f_3(|D_z|) \\ & - K_t^{(\alpha)} \int_{Y_1}^{Y_1+Y_0} \frac{X_t}{R^2 - D_z^2} f_3(X_t, Y) dY \\ & \left. + \int_{X_1}^{X_2} \frac{Y_1}{R^2 - D_z^2} f_3(X, Y_1) dX \right. \\ & \left. - \int_{X_1}^{X_2} \frac{Y_2(0)}{R^2 - D_z^2} f_3(X, Y_2(X)) dX \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$J_C = -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^2 (-1)^l Y_1^4 f_1(X_l, Y_1)$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{l=1}^2 (-1)^l \left\{ \frac{1}{4k^2} (X_l^2 - Y_1^2) f_2(X_l, Y_1) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2k^4} f_3(X_l, Y_1) \right\} \\
 & - \frac{1}{4} K_t^{(\alpha)} X_t^4 [f_1(X_t, Y_1 + y_0) - f_1(X_t, Y_1)] \\
 & + \frac{1}{k^2} \int_{X_1}^{X_2} X f_2(X, Y_2(X)) dX \\
 & + \frac{1}{4} \int_{X_1}^{X_2} \frac{X^4 [X - \alpha_1 Y_2(X)] e^{-jkR(X, Y_2(X))}}{R + pD_z} \frac{dX}{R}
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$f_2(X, Y) = (1 + jkR) e^{-jkR(X, Y)} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 f_3(X, Y) &= [1 + (1 + jkR)(2 + jk(R - pD_z))] \\
 &\times e^{-jkR(X, Y)}
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{30} &= \frac{1}{k^2} \left[K_t^{(\alpha)} \int_{Y_1}^{Y_1 + y_0} f_2(X_t, Y) dY \right. \\
 & \left. + \alpha_1 \int_{X_1}^{X_2} f_2(X, Y_2(X)) dX \right] - \Theta_{12}
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{03} &= \frac{1}{k^2} \left[\int_{X_1}^{X_2} f_2(X, Y_2(X)) dY \right. \\
 & \left. - \int_{X_1}^{X_2} f_2(X, Y_1) dX \right] - \Theta_{21}
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{12} &= \frac{1}{3} \left\{ - \sum_{l=1}^2 (-1)^l Y_1^3 f_1(X_l, Y_1) \right. \\
 & - K_t^{(\alpha)} \int_{Y_1}^{Y_1 + y_0} \frac{Y^4}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X_t, Y)}}{R} dY \\
 & \left. + \int_{X_1}^{X_2} \frac{Y_2^3(X) [X - \alpha_1 Y_2(X)] e^{-jkR(X, Y_2(X))}}{R + pD_z} \frac{dX}{R} \right\}
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{21} &= \frac{1}{3} \left\{ K_t^{(\alpha)} X_t^3 [f_1(X_t, Y_1 + y_0) - f_1(X_t, Y_1)] \right. \\
 & + \int_{X_1}^{X_2} \frac{X^4}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X, Y_1)}}{R} dX \\
 & \left. - \int_{X_1}^{X_2} \frac{X^3 [X - \alpha_1 Y_2(X)] e^{-jkR(X, Y_2(X))}}{R + pD_z} \frac{dX}{R} \right\}
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \sum_{l=1}^2 (-1)^l Y_l \left[pD_z f_1(X_l, Y_l) + \frac{e^{-jkR(X_l, Y_l)}}{jk} \right] \\
 & - K_t^{(\alpha)} \int_{Y_1}^{Y_1 + y_0} \frac{Y^2}{R + pD_z} e^{-jkR(X_t, Y)} dY
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{X_1}^{X_2} \frac{Y_2(X) [X - \alpha_1 Y_2(X)] e^{-jkR(X, Y_2(X))}}{R + pD_z} dX
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_2 &= -pD_z \left\{ K_t^{(\alpha)} X_t [f_1(X_t, Y_1 + y_0) - f_1(X_t, Y_1)] \right. \\
 & + \int_{X_1}^{X_2} \frac{X^2}{R + pD_z} \frac{e^{-jkR(X, Y_1)}}{R} dX \\
 & - \int_{X_1}^{X_2} \frac{X [X - \alpha_1 Y_2(X)] e^{-jkR(X, Y_2(X))}}{R + pD_z} \frac{dX}{R} \left. \right\} \\
 & - \frac{1}{jk} \int_{X_1}^{X_2} [e^{-jkR(X, Y_2(X))} - e^{-jkR(X, Y_1)}] dX
 \end{aligned} \tag{37}$$

以上より、式 (12) は式 (24)~式 (37) のパラメータを (r, s) の関数で表し、以下の 2 重積分で表される。

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \sum_{h=1}^2 (-1)^h [J_{21}/\beta_1 + J_{22}] - K_t^{(\beta)} J_{23} \\
 & + J_{24} + J_{25}/\beta_1 + \frac{1}{jk} [K_t^{(\beta)} J_{26} - J_{27} + J_{28}] \\
 & + \frac{1}{jk} \sum_{h=1}^2 \frac{\pi}{2} (|D_z| - pD_z) e^{-jk|D_z|} \\
 & \times \int_{X_1}^{X_2} \int_{Y_1}^{Y_2(X)} \text{sgn}(u_h) [\text{sgn}(v_1) - \text{sgn}(v_2(0))] dY dX \\
 & - \frac{1}{jk} (\text{文献 [12] の } J_2)
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 J_{21} &= \tilde{A}_{xs}^2 \Phi_1(r_h, s(r_h)) + \tilde{A}_{ys}^2 \Phi_2(r_h, s(r_h)) \\
 & + \tilde{A}_{xs} \tilde{A}_{ys} \Phi_3(r_h, s(r_h))
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 J_{22} &= 2\tilde{A}_{xr} \tilde{A}_{xs} \Phi_1(r_h, 0) + 2\tilde{A}_{yr} \tilde{A}_{ys} \Phi_2(r_h, 0) \\
 & + (\tilde{A}_{xr} \tilde{A}_{ys} + \tilde{A}_{yr} \tilde{A}_{xs}) \Phi_3(r_h, 0)
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 J_{23} &= - \int_0^{s_0} [\tilde{A}_{xr} \tilde{A}_{xs}^2 \Theta_{30}(\bar{r}_t, s) + \tilde{A}_{yr} \tilde{A}_{ys}^2 \Theta_{03}(\bar{r}_t, s) \\
 & + \tilde{A}_{xs} (\tilde{A}_{xs} \tilde{A}_{yr} + 2\tilde{A}_{ys} \tilde{A}_{xr}) \Theta_{21}(\bar{r}_t, s) \\
 & + \tilde{A}_{ys} (\tilde{A}_{xr} \tilde{A}_{ys} + 2\tilde{A}_{xs} \tilde{A}_{yr}) \Theta_{12}(\bar{r}_t, s)] ds
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 J_{24} &= - \int_0^{r_0} [\tilde{A}_{xs} \tilde{A}_{xr}^2 \Theta_{30}(r, 0) + \tilde{A}_{ys} \tilde{A}_{yr}^2 \Theta_{03}(r, 0) \\
 & + \tilde{A}_{xr} (\tilde{A}_{xr} \tilde{A}_{ys} + 2\tilde{A}_{yr} \tilde{A}_{xs}) \Theta_{21}(r, 0) \\
 & + \tilde{A}_{yr} (\tilde{A}_{xs} \tilde{A}_{yr} + 2\tilde{A}_{xr} \tilde{A}_{ys}) \Theta_{12}(r, 0)] dr
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 J_{25} &= \int_0^{r_0} \{ A_1 A_3 \tilde{A}_{xs} \Theta_{30}(r, s(r)) \\
 & + A_2 A_4 \tilde{A}_{ys} \Theta_{03}(r, s(r)) \\
 & + [A_1 A_3 \tilde{A}_{ys} + (A_1 A_4 + A_2 A_3) \tilde{A}_{xs}] \Theta_{21}(r, s(r))
 \end{aligned}$$

$$+ [A_2 A_4 \tilde{A}_{xs} + (A_1 A_4 + A_2 A_3) \tilde{A}_{ys}] \Theta_{12}(r, s(r)) \} dr \quad (43)$$

$$J_{26} = - \int_0^{s_0} [\tilde{A}_{xr} \Psi_1(\bar{r}_t, s) + \tilde{A}_{yr} \Psi_2(\bar{r}_t, s)] ds \quad (44)$$

$$J_{27} = - \int_0^{r_0} [\tilde{A}_{xs} \Psi_1(r, 0) + \tilde{A}_{ys} \Psi_2(r, 0)] dr \quad (45)$$

$$J_{28} = - \int_0^{r_0} [A_1 \Psi_1(r, s(r)) + A_2 \Psi_2(r, s(r))] dr \quad (46)$$

$$A_1 = \beta_1 \tilde{A}_{xr} + \tilde{A}_{xs}, \quad A_2 = \beta_1 \tilde{A}_{yr} + \tilde{A}_{ys} \\ A_3 = \beta_1 \tilde{A}_{xs} - \tilde{A}_{xr}, \quad A_4 = \beta_1 \tilde{A}_{ys} - \tilde{A}_{yr} \quad (47)$$

式 (38) は文献 [12] の 3 章の前に記述されている手法により単積分化できる。

3. 数値計算結果

本解析法の妥当性、有効性の範囲の検証を行う、式 (11) の 4 重積分を直接積分する DI 法と、実数 x の関数 $F(x)$ が $x \rightarrow 0$ のとき、

$$F(x) \rightarrow \gamma + j\pi/2 + \ln(k|x|) \quad (48)$$

となることを利用して (γ はオイラーの定数)、

$$F(R + pD_z) = [F(R + pD_z) - \ln(k(R + pD_z))] \\ + \ln(k(R + pD_z)) \quad (49)$$

とにおいて、右辺 [] 内の積分は直接 4 重積分し、次項の積分は解析的に行う SS 法と比較検討する。自然対数関数の積分は今回の解析法と同様の手法を使用している。各セグメントは同一形状で端面の高さが等しいモノポールセルから構成され、セルの大きさは断面が $4\text{mm} \times 4\text{mm}$ の 2 等辺三角形で高さが 2mm としている。また、セグメントの比誘電率は 10 とし、電流方向は同一としている。また、計算周波数は周波数特性以外、 1.5GHz である。積分手法は文献 [12] の 3 章に記載されている方法と同一である。収束誤差は安定した結果が得られるように、DI 法を除いて文献 [12] より一桁小さくしている。

図 3 及び図 4 にダイポールセグメント及びモノポールセグメントの本手法による自己インピーダンスの周波数特性及び SS 法による結果を基準とした相対誤差を示す。本手法と SS 法は良く一致しており、周波数が高くなると相対誤差が小さくなるのがわかる。相対誤差はセルが重複または接触した構成で同様の特性であり、この要因は、関数 F の変数は実質的に周波数に比例するため、元来小さい変数の関数 F の精度が周

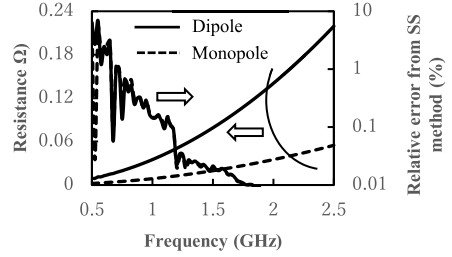


図 3 ダイポール/モノポールセグメントの自己抵抗特性
Fig. 3 Self-resistance frequency characteristics of the dipole segment and monopole segment.

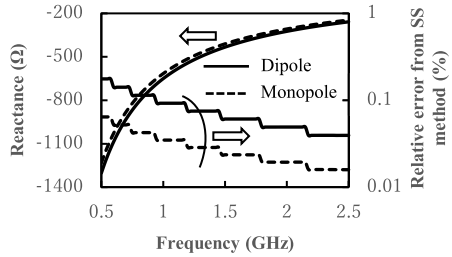


図 4 ダイポール/モノポールセグメントの自己リアクタンス特性
Fig. 4 Self-reactance frequency characteristics of the dipole segment and monopole segment.

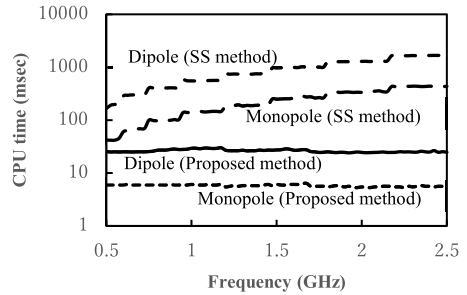


図 5 自己インピーダンスの CPU 時間特性
Fig. 5 CPU time frequency characteristics of the self-impedance.

波数とともに向上したためと思われる。図 5 は本手法と SS 法による自己インピーダンス計算の CPU 時間を示す。本手法は周波数に対してはほぼ一定の値であるという特徴を有し、SS 法に比べ、ダイポールセグメントは $1/7 \sim 1/70$ 程度、モノポールセグメントは $1/6 \sim 1/60$ 程度の CPU 時間である。また、一個のセルが重複したダイポールセグメント間の相互インピーダンスの周波数特性の CPU 時間も、図 5 と比べ本手法はほぼ同一で SS 法が約 25% 減少するが、本手法は SS 法より十分短いという結果が得られている。更に、電流軸方向に接しているダイポールセグメント間の相互イ

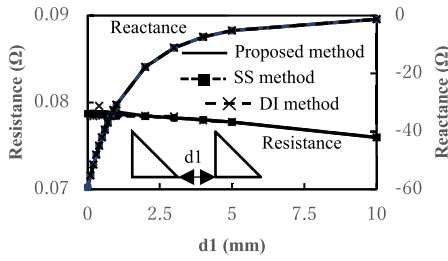


図6 横方向の距離 d_1 と相互インピーダンス
Fig. 6 Mutual impedance with distance of the side surfaces.

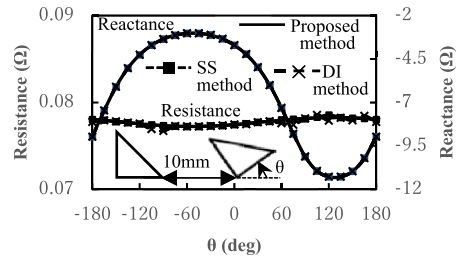


図10 セグメントの回転角 θ と相互インピーダンス
Fig. 10 Mutual impedance with angle θ of one segment.

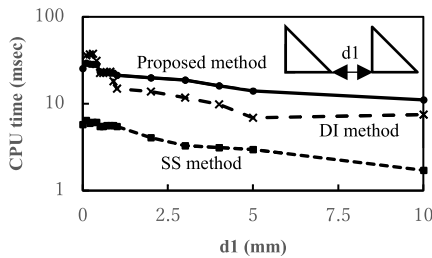


図7 横方向の距離 d_1 と CPU 時間
Fig. 7 CPU time with distance d_1 of the side surfaces.

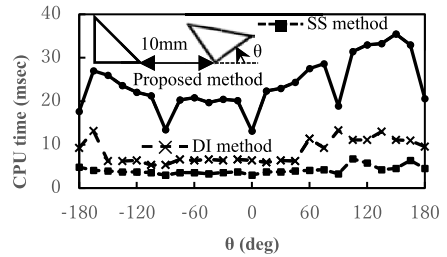


図11 セグメントの回転角 θ と CPU 時間
Fig. 11 CPU time with angle θ of one segment.

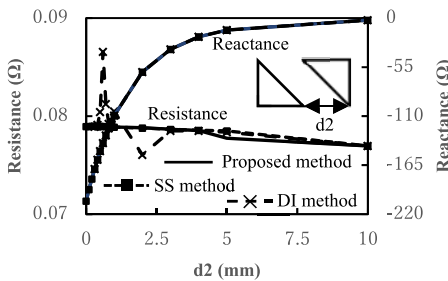


図8 横方向の距離 d_2 と相互インピーダンス
Fig. 8 Mutual impedance with distance d_2 of the side surfaces.

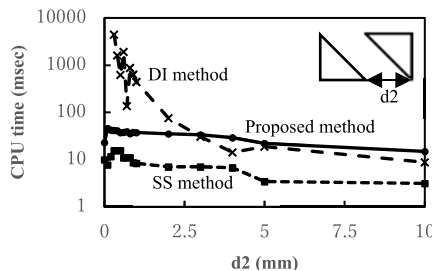


図9 横方向の距離 d_2 と CPU 時間
Fig. 9 CPU time with distance d_2 of the side surfaces.

ンピーダンスの周波数特性の CPU 時間も SS 法より短く、SS 法の $2/3 \sim 1/16$ 程度であった。

次に、図 6～図 9 に、セグメントの横方向の距離に対する相互インピーダンス及び CPU 時間の変化を示

す。特に側面同士が相対する場合、距離が短いときの DI 法は抵抗成分の変動が大きく、CPU 時間が二桁程度長い。本手法と SS 法ではインピーダンスは良く一致しているが、CPU 時間は SS 法が短いことがわかる。1 個のセグメントを回転させた場合の相互インピーダンスと CPU 時間をそれぞれ、図 10、図 11 に示す。3 手法ともインピーダンスは良く一致しており、CPU 時間は SS 法が最も短いことがわかる。尚、電流軸方向については、本手法の CPU 時間はセグメント間距離が約 0.4mm までは、1.5GHz 以上の周波数で SS 法より短いという結果が得られた。

4. む す び

本論文では、2 個の直角三角柱誘電体セルから構成されるダイポールセグメント、あるいは、1 個の直角三角柱誘電体セルから構成されるモノポールセグメントが、平行且つ任意に配置された構成について、分極電流を用いたガラーキンモーメント法による自己・相互インピーダンスの 6 重積分式が、特異点を除去した単積分表現式の和で表されることを示した。次に、SS 法及び DI 法を用いた計算結果との比較検討を行い、本解析法の妥当性及び有効性の範囲を確認した。計算時間の観点では、少なくとも本手法はセルが重複あるいは三角形端面が接触する構成のとき有効であり、他

の構成では SS 法が有効であることがわかった。

文 献

- [1] A. Saeedfar and K. Sawaya, "Improved solution of tensor-volume integral equation using mixed-domain MoM with polynomial expansion," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E90-B, no.3, pp.607-620, March 2007.
- [2] A. Saeedfar, H. Sato, and K. Sawaya, "Impedance analysis of printed antenna on three-dimensional high-permittivity dielectric substrate using mixed-domain MoM," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E92-B, no.6, pp.2352-2355, June 2009.
- [3] 吉川幸広, 宮下裕章, 千葉 勇, 牧野 滋, "分極電流モーメント法におけるインピーダンス行列要素の積分次数低減," *信学論 (B)*, vol.J86-B, no.9, pp.1721-1730, Sept. 2003.
- [4] H. Zhai, Q. Yuan, Q. Chen, and K. Sawaya, "Single integral expressions of self/mutual impedance of volume sinusoidal monopoles with consideration of endpoint charges," *IEICE Technical Report*, A-P2007-156, Jan. 2008.
- [5] 吉川幸広, 澤谷邦男, 陳 強, "共平面形プリントダイポールアンテナのガラーキンモーメント法解析," *信学論 (B)*, vol.J96-B, no.9, pp.1001-1009, Sept. 2013.
- [6] 吉川幸広, 陳 強, 澤谷邦男, "ガラーキンモーメント法によるプリントアンテナ数値解析の高精度化に関する検討," *信学論 (B)*, vol.J98-B, no.1, pp.44-52, Jan. 2015.
- [7] S.M. Rao, D.R. Wilton, and A.W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.AP-30, no.3, pp.409-418, May 1982.
- [8] D.H. Schaubert, D.R. Wilton, and A.W. Glisson, "A tetrahedral modeling method for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped inhomogeneous dielectric bodies," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.AP-32, no.1, pp.77-85, Jan. 1984.
- [9] M. He, Q. Chen, Q. Yuan, K. Sawaya, and X. Xu, "A simple strip model in the volume-surface integral equation for analysis of arbitrary probe-fed conformal microstrip antennas," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol.8, pp.530-533, 2009.
- [10] L.M. Zhang and X.Q. Sheng, "Solving volume electric current integral equation with full- and half-SWG functions," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol.14, pp.682-685, 2015.
- [11] X. Li, L. Lei, H. Zhao, L. Guo, M. Jiang, Q. Cai, Z. Nie, and J. Hu, "Efficient solution of scattering from composite planar thin dielectric-conductor objects by volume-surface integral equation and simplified prism vector basis functions," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.66, no.5, pp.2686-2690, May 2018.
- [12] 吉川幸広, 陳 強, "2組の直角三角形セルからなる平行ダイポールセグメント間インピーダンスの単積分化に関する検討," *信学論 (B)*, vol.J104-B, no.2, pp.93-101, Feb. 2021. DOI:10.14923/transcomj.2020JBP3040
- [13] 吉川幸広, 宮下裕章, 牧野 滋, "面素モーメント法における任意位置屈曲方形ダイポール間インピーダンスの単積分表現式," *信学論 (B)*, vol.J88-B, no.6, pp.1119-1129, June 2005.
- [14] D.R. Wilton, S.M. Rao, A.W. Glisson, D.H. Schaubert, O.M. Al-Bundak, and C.M. Butler, "Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.AP-32, no.3, pp.276-281, March 1984.
- [15] R.D. Graglia, "On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.41, no.10, pp.1448-1455, Oct. 1993.
(2021年9月30日受付, 11月24日再受付,
2022年2月2日早期公開)



吉川 幸広 (正員)

昭54 東北大・工・通信卒。昭56 同大学院修士課程了。同年三菱電機(株)入社。以来、レーダ、移動通信、衛星通信等のアンテナ、マイクロ波受動回路素子の開発に従事。平18 退職。平26 東北大学大学院工学研究科電気・通信工学専攻博士課程了。

工博, IEEE 会員。



陳 強 (正員:フェロー)

昭63 西安電子科技大卒。平6 東北大学院博士課程了。現在、同大学院工学研究科通信工学専攻教授。移動通信用アンテナ、アレーアンテナ、電磁界の数値解析の研究に従事。工博, IEEE シニア会員, 平5 本会学術奨励賞受賞。平8 及び平18 本会通信ソサイエティ活動功労賞。平21 同論文賞及び喜安善市賞受賞。