論　文

分極電流ガラーキンモーメント法における直角三角柱セルから構成されるセグメント間インピーダンスの積分次数低減化の検討

吉川　幸広[†a)]　　陳　　強[††]

Study of the Impedance Integral Degree Reduction of Segments Composed of Right-Angled Triangular Prism Cell on the Polarization Current Galerkin's Method of Moments

Yukihiro YOSHIKAWA[†a)] and Qiang CHEN[††]

あらまし　部分領域分極電流ガラーキンモーメント法を直角三角柱セルを基本セルとしたダイポール・モノポールセグメントに適用した場合の，RWG (Rao-Wilton-Glisson) 関数形ダイポール・モノポールセグメント間自己・相互インピーダンス，及び RWG 関数形セグメントと直交する正弦関数形ダイポール・モノポールセグメントとの相互インピーダンスの 6 重積分式が，特異点を除去した形で最大 2 重積分式で表されることを示している．数値比較検討は SS 法 (Singularity Subtraction Method) 及び直接積分法とで行い，本解析法の妥当性の検証及び有効性の範囲を得ている．

キーワード　直角三角柱，ガラーキンモーメント法，分極電流，RWG (Rao-Wilton-Glisson) 関数，正弦関数

1. まえがき

筆者らは板状誘電体にプリントされた任意形状アンテナについて体積積分方程式と表面積分方程式を併用し，誘電体については断面が直角三角形の三角柱セル [1]，導体については直角三角形セルを用いた部分領域ガラーキンモーメント法の解析を実施中である．展開電流関数は，三角形セルは RWG（Rao-Wilton-Glisson）関数 [2]，三角柱の三角形方向は RWG 関数，柱方向は正弦関数 [3] を用いている．その際，インピーダンス行列要素を文献 [1] で示されているような近似表現を用いることなく，解析的に低次元化（必要性が高い場合に単積分化）を図っている．

三角柱セルを縦に接続した柱状ダイポールセグメント及び柱方向の誘電体端部に設けられた 1 個の三角柱セルからなるモノポールセグメントについて，全ての組み合わせのセグメント間の自己・相互インピーダンスの 6 重積分式を解析的に単積分化した [4]．最初に電流軸方向の積分を純虚数変数の積分指数関数に相当する関数 F [5], [6] を用いて表し，次に関数 F の断面部分についての 4 重積分を単積分化する解析手順である．数値検討は関数 F の 4 重積分について，SS 法 (Singularity Subtraction Method) [7]〜[9] を用いた計算結果，及び直接数値積分する DI 法 (Direct Integral Method) を用いた計算結果と比較検討し，本解析法の妥当性を得た．計算時間の点では，少なくとも本手法はセルが重複あるいは三角形端面が接触する構成のとき有効であり，距離が比較的近い他の構成では SS 法が有効であるという結果が得られた．

今回，三角柱セルを横に接続した四角柱ダイポールセグメント及び横方向の誘電体端部に設けられた 1 個の RWG 関数形三角柱セルからなるモノポールセグメントを追加して，文献 [4] で検討した構成以外の全ての組み合わせのセグメント間の自己・相互インピーダンスの 6 重積分式の積分次数低減化を実施する．次に SS 法を用いた計算結果，及び直接数値積分する DI 法を用いた計算結果との比較検討し，本解析法の妥当性の検証，有効性の範囲を確認する．なお，使用コン

† 横浜市
Yokohama-shi, 244–0002 Japan
†† 東北大学大学院工学研究科通信工学専攻，仙台市
Communication Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University, 6–6–05 Aramaki Aza Aoba, Aoba-ku, Sendai-shi, 980–8579 Japan
a) E-mail: yy-yottchi@r5.dion.ne.jp
DOI:10.14923/transcomj.2022JBP3026

ピュータは文献 [10] と同一である．

2. 自己・相互インピーダンスの積分次数低減化

2.1 モノポールモードセル間インピーダンス表現式

均質性誘電体において，電界型体積積分方程式に区分的分極電流関数を未知変数とした部分領域ガラーキンモーメント法を適用した場合，それぞれ，セグメント構成が，2 個のモノポールモードセルからなるダイポールセグメント，または 1 個のモノポールモードセルからなるモノポールセグメントのいずれかである，M，N セグメント間のインピーダンス行列要素は，ベクトル電流関数を $\mathbf{J}_M$，$\mathbf{J}_N$，体積要素を V_M，V_N として，次式で表される．

$$Z_{MN} = \frac{jkZ_0}{4\pi}\iiint_{V_M}\iiint_{V_N}\left\{\mathbf{J}_M(\mathbf{r})\bullet\mathbf{J}_N(\mathbf{r}') - \frac{1}{k^2}(\mathbf{J}_M(\mathbf{r})\bullet\nabla)(\mathbf{J}_N(\mathbf{r}')\bullet\nabla')\right\}\frac{e^{-jkR}}{R}dV'dV + \frac{1}{jkY_0\tau}\iiint_{V_M}\mathbf{J}_M(\mathbf{r})\bullet\mathbf{J}_N(\mathbf{r})dV \quad (1)$$

$$R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \quad (2)$$

ここで，k，Z_0，Y_0 はそれぞれ，自由空間における波数，波動インピーダンス，波動アドミタンスであり，パラメータ τ は複素電気感受率を示す．

式 (1) を以下のようにモノポールモードセル間の積分の和で表す．ただし，モノポールセグメントを含む場合，該当しない項は無視するものとする．

$$Z_{MN} = \frac{jkZ_0}{4\pi}\sum_{\mu=1}^{2}\sum_{\nu=1}^{2}\bar{Z}_{MN}^{\mu\nu} + \frac{1}{jkY_0\tau}\sum_{\mu=1}^{2}\Gamma_{MN}^{\mu\nu} \quad (3)$$

$$\bar{Z}_{MN}^{\mu\nu} = \int_{V_M^\mu}\int_{V_N^\nu}\left\{\mathbf{J}_M^\mu\bullet\mathbf{J}_N^\nu - \frac{1}{k^2}(\mathbf{J}_M^\mu\bullet\nabla)(\mathbf{J}_N^\nu\bullet\nabla')\right\} \times\frac{e^{-jkR}}{R}dV'dV \quad (4)$$

$$\Gamma_{MN}^{\mu\nu} = \int_{V_M^\mu}\mathbf{J}_M^\mu\bullet\mathbf{J}_N^\nu dV \quad (5)$$

上式では積分記号の簡略化及び座標ベクトルの省略化を行っている．一般に閉局面 S で囲まれた領域 V において，スカラー関数を ϕ，ベクトル関数を $\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$，領域 V の外向き単位法線ベクトルを $\hat{n}$ とおき，以下の式で表すベクトル公式及びガウスの定理

$$\nabla\bullet(\phi\mathbf{A}_1) = \phi\nabla\bullet\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\bullet\nabla\phi \quad (6)$$

表 1　式 (8) で考慮すべき項
Table 1　Items for consideration in Eq. (8).

M segment	N segment	Right side of eq. (8)
D mode	D mode	①
D mode	M mode	①+②
M mode	D mode	①+③
M mode	M mode	①+②+③+④

$$\int_V\nabla\bullet\mathbf{A}_2 dV = \int_S\mathbf{A}_2\bullet\hat{n}dS \quad (7)$$

において，ϕ を e^{-jkR}/R，$\mathbf{A}_1$ を $\mathbf{J}_M^\mu$ 及び $\mathbf{J}_N^\nu$ に，$\mathbf{A}_2$ を $\phi\mathbf{A}_1$ に置き換えると，式 (4) は以下の式に変形できる．

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{MN}^{\mu\nu} =& \int_{V_M^\mu}\int_{V_N^\nu}\left\{\mathbf{J}_M^\mu\bullet\mathbf{J}_N^\nu - \frac{1}{k^2}(\nabla\bullet\mathbf{J}_M^\mu)(\nabla'\bullet\mathbf{J}_N^\nu)\right\}\\ &\times\frac{e^{-jkR}}{R}dV'dV\\ &+\frac{1}{k^2}\int_{V_M^\mu}\int_{S_N^\nu}(\nabla\bullet\mathbf{J}_M^\mu)(\mathbf{n}'\bullet\mathbf{J}_N^\nu)\frac{e^{-jkR}}{R}dS'dV\\ &+\frac{1}{k^2}\int_{S_M^\mu}\int_{V_N^\nu}(\mathbf{n}\bullet\mathbf{J}_M^\mu)(\nabla'\bullet\mathbf{J}_N^\nu)\frac{e^{-jkR}}{R}dV'dS\\ &-\frac{1}{k^2}\int_{S_M^\mu}\int_{S_N^\nu}(\mathbf{n}\bullet\mathbf{J}_M^\mu)(\mathbf{n}'\bullet\mathbf{J}_N^\nu)\frac{e^{-jkR}}{R}dS'dS\end{aligned} \quad (8)$$

ここで，$\mathbf{n}$，$\mathbf{n}'$ はそれぞれ，V_M^μ，V_N^ν の外向き単位法線ベクトルを示す．

式 (8) は，M，N セグメントの電流関数が両方とも正弦関数である場合は，右辺第一項から第三項までを含めて，純虚数変数の積分指数関数の面積分で表され，第四項はモノポールセグメント間でのみ値をもつことが示されている [4], [11]．今回検討する構成では，各セグメントのモードと式 (8) において考慮すべき項は表 1 で表される．なお，簡略化のため，ダイポールモードを D モード，モノポールモードを M モードとし，第一項を ①，第二項を ②，第三項を ③，第四項を ④ としている．表 1 の結果を踏まえ，次節以降の具体的な構成では，各項ごとに積分次数の低減化検討を行うことにする．

2.2 RWG 関数形モノポールセル間

モノポールセル間の座標系の一例を図 1 に示す．単位ベクトル記号を任意の座標 u について $\hat{u}$ としたとき，座標軸の条件は，$\tilde{A}_{zt} = \hat{z}\bullet\hat{t} = \pm 1$ である．電流は xy 面及び rs 面を水平に，かつ z，t 軸方向を一様に流

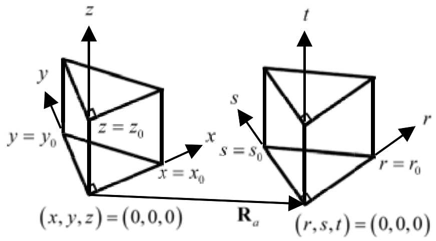

図 1　モノポールセル間の座標系
Fig. 1　Coordinate system between monopole cells.

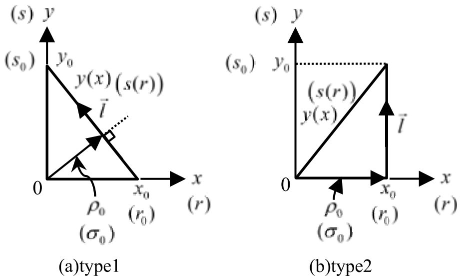

図 2　直角三角形の座標系
Fig. 2　Coordinate system of right-angled triangle.

れるものとする．図 1 において，ローカル座標系の原点間の距離ベクトル $\mathbf{R}_a$ を，

$$\mathbf{R}_a = x_a\hat{x} + y_a\hat{y} + z_a\hat{z} \tag{9}$$

とおき，任意の座標間の距離ベクトル $\mathbf{R}$ を以下の式で表す [6].

$$\mathbf{R} = D_x\hat{x} + D_y\hat{y} + D_z\hat{z} = -(D_r\hat{r} + D_s\hat{s} + D_t\hat{t})$$
$$D_t = -\tilde{A}_{zt}D_z \tag{10}$$

文献 [10] に示されているように，電流の流れる方向と座標系は 2 種類のタイプに分類され，図 2 にその座標系を示す．図中，$y(x)$，$s(r)$ は斜辺形状，ρ_0，σ_0 は原点から電流の入出力端面までの最短距離を表す．

ベクトル電流関数を以下のように RWG 関数形で表す．

$$\mathbf{J}_M^{\mu} = \frac{(-1)^{\mu+1}}{2z_0\bar{S}_M^{\mu}}\rho\hat{\rho} \tag{11}$$

$$\mathbf{J}_N^{\nu} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{2t_0\bar{S}_N^{\nu}}\sigma\hat{\sigma} \tag{12}$$

ここで，$\bar{S}_M^{\mu}$，$\bar{S}_N^{\nu}$ は直角三角形の面積を示す．式 (8) の $\bar{Z}_{MN}^{\mu\nu}$ は，以下の式で表される．

$$\bar{Z}_{MN}^{\mu\nu} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{4z_0t_0\bar{S}_M^{\mu}\bar{S}_N^{\nu}}\int_0^{z_0}\int_0^{t_0}$$
$$\times\left\{\int_{\bar{S}_M^{\mu}}\int_{\bar{S}_N^{\nu}}\left[(\hat{\rho}\bullet\hat{\sigma})\rho\sigma - \frac{4}{k^2}\right]\frac{e^{-jkR}}{R}dS_N dS_M\right.$$
$$+\frac{2}{k^2}\int_{\bar{S}_M^{\mu}}\int_{l_N^{\nu}}\sigma_0\frac{e^{-jkR}}{R}dl_N dS_M$$
$$+\frac{2}{k^2}\int_{\bar{S}_N^{\nu}}\int_{l_M^{\mu}}\rho_0\frac{e^{-jkR}}{R}dl_M dS_N$$
$$\left.-\frac{1}{k^2}\int_{l_M^{\mu}}\int_{l_N^{\nu}}\rho_0\sigma_0\frac{e^{-jkR}}{R}dl_N dl_M\right\}dtdz \tag{13}$$

ここで，線積分の経路 l_M^{μ}，l_N^{ν} は，図 2 に示すベクトル $\vec{l}$ に沿ったものである．また，式 (5) の $\Gamma_{MN}^{\mu\nu}$ は重複セルのみ値をもち，条件 $D_r = D_s = 0$ 及び $\alpha_1 = -\partial y(x)/\partial x$ を用いて以下の式で表される．

$$\Gamma_{MN}^{\mu\nu} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{\left(2z_0\bar{S}_M^{\mu}\right)^2}z_0I_0 \tag{14}$$

$$I_0 = -\frac{x_0y^2(x_0)}{\alpha_1}\left[\frac{x_0 - x_a}{2} + \frac{y(x_0)}{3\alpha_1}\right]$$
$$+\frac{1}{6\alpha_1}\left[\frac{x_a}{\alpha_1} + y_a\right]\left[y^3(x_0) - y^3(0)\right]$$
$$-\frac{1}{12\alpha_1}\left[\frac{1}{\alpha_1^2} + 1\right]\left[y^4(x_0) - y^4(0)\right] \tag{15}$$

式 (13) の { } 内第一項の積分は単積分化済みである [10]．ただし，距離ベクトル $\mathbf{R}$ の z 成分を D_z に変更したものとなる．式 (13) の { } 内第二項及び第三項の積分を求める．第二項の積分は第三項において座標を変換したものに相当するので，ここでは第三項の積分を求める．e^{-jkR}/R の面積分は文献 [10] の単積分化した式 J_1 において，一般に z_a を D_t に変更した式で表される．次に，線積分を考える．変数 x，y の関数を $f(x, y)$ とした場合，次の積分

$$I_1 = \int_{l_M^{\mu}}\rho_0 f(x, y)dl_M \tag{16}$$

は以下の式で表される．

$$I_1 = \begin{cases} x_0\displaystyle\int_0^{y_0} f(y^{-1}(y), y)dy & :\text{type1} \\ x_0\displaystyle\int_0^{y_0} f(x_0, y)dy & :\text{type2}\end{cases} \tag{17}$$

したがって，第三項の積分は 2 重積分で表され，M セグメントの第 μ モノポールセルの三角形のタイプごとに求めることになるが，この 2 重積分の係数を除いた

項を I_{13} とおくと，変数変換により I_{13} は，以下の (a), (b)，(c) のいずれかの積分となる．

(a) $$I_{13}^{(a)}=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\psi_1}^{\psi_2}\frac{\xi}{R^2-D_t^2}e^{-jkR}d\psi d\xi \tag{18a}$$

$$R=\sqrt{\xi^2+(\psi+C_1\xi)^2+D_t^2} \tag{18b}$$

(b) $$I_{13}^{(b)}=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\psi_1}^{\psi_2}\frac{\psi}{R^2-D_t^2}e^{-jkR}d\psi d\xi \tag{19a}$$

$$R=\sqrt{\xi^2+(\psi+C_1\xi)^2+D_t^2} \tag{19b}$$

(c) $$I_{13}^{(c)}=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\psi_1}^{\psi_2}\frac{1}{R^2-D_t^2}e^{-jkR}d\psi d\xi \tag{20a}$$

$$R=\sqrt{(\xi-\psi)^2+C_1^2+D_t^2} \tag{20b}$$

ここで，C_1 は定数であり，(c) 以外はゼロの場合も考慮する．(a) の積分は実数関数の分子 ξ を

$$\xi=[\xi+C_1(\psi+C_1\xi)]-C_1(\psi+C_1\xi) \tag{21}$$

と変形して，以下の式で表される．ただし，簡略化のため，R の変数は明記していない．

$$\begin{aligned}I_{13}^{(a)}=&\sum_{h=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{h+l}\frac{\psi_l}{\varphi_0^2}f_1(\xi_h,\psi_l)\\&-\sum_{h=1}^{2}(-1)^h\int_{\psi_1}^{\psi_2}\left[1-\frac{\xi_h^2}{R^2-D_t^2}\right]e^{-jkR}d\psi\\&+\sum_{l=1}^{2}(-1)^lC_1\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[1-\frac{(\psi_l/\varphi_0)^2}{R^2-D_t^2}\right]e^{-jkR}d\xi\end{aligned} \tag{22}$$

ここで，パラメータ φ_0 は $\varphi_0=\sqrt{1+C_1^2}$ であり，関数 $f_1(\xi,\psi)$ は次式で表される．

$$f_1(\xi,\psi)=\frac{1}{2}\left[e^{jkD_t}F(R+D_t)+e^{-jkD_t}F(R-D_t)\right] \tag{23}$$

関数 $F(R\pm D_t)$ の定義式は文献 [6] の式 (11) で与えられる．同様にして，(b) の積分は次式で表される．

$$\begin{aligned}I_{13}^{(b)}=&\sum_{h=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{h+l}\xi_hf_1(\xi_h,\psi_l)\\&+\sum_{h=1}^{2}(-1)^hC_1\int_{\psi_1}^{\psi_2}\left[1-\frac{\xi_h^2}{R^2-D_t^2}\right]e^{-jkR}d\psi\\&-\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\varphi_0^2\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[1-\frac{(\psi_l/\varphi_0)^2}{R^2-D_t^2}\right]e^{-jkR}d\xi\end{aligned} \tag{24}$$

(c) の積分は，変数 ξ，ψ が $\xi-\psi$ の関係にある任意関数 $f(\xi-\psi)$ に変数変換

$$\Theta=\xi-\psi,\quad \Phi=\xi+\psi \tag{25}$$

を適用して，Θ，Φ 空間に変換して得られる積分公式

$$\begin{aligned}&\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\psi_1}^{\psi_2}f(\xi-\psi)d\psi d\xi\\&=\sum_{h=1}^{2}(-1)^h\int_{\Theta_{h1}}^{\Theta_{h2}}(\Theta-\xi_h)f(\Theta)d\Theta\\&\quad+\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\int_{\Theta_{1l}}^{\Theta_{2l}}\psi_lf(\Theta)d\Theta\end{aligned} \tag{26a}$$

$$\Theta_{hl}=\xi_h-\psi_l \tag{26b}$$

を用いると，以下の式で表される．

$$\begin{aligned}I_{13}^{(c)}=&\sum_{h=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{h+l}f_1(\xi_h,\psi_l)\\&+\sum_{h=1}^{2}(-1)^h\left\{-\int_{\Theta_{h1}}^{\Theta_{h2}}\xi_h+\int_{\Theta_{1h}}^{\Theta_{2h}}\psi_h\right\}\\&\times\frac{1}{R^2-D_t^2}e^{-jkR}d\Theta\end{aligned} \tag{27}$$

次に，式 (13) の { } 内第四項の積分を求める．この積分は三角形の 4 組のタイプごとに求めることになるが，I_{13} と同様に係数を除いた e^{-jkR}/R のみの 2 重積分を I_{14} とおくと，I_{14} の関数 R は I_{13} の (a) 及び (b) または (c) のいずれかになる．ただし，(c) の場合も $C_1=0$ を含む．(a) 及び (b) の R の場合の I_{14} を $I_{14}^{(ab)}$ とおくと，$I_{14}^{(ab)}$ は次式で表される [6]．

$$\begin{aligned}I_{14}^{(ab)}=-\frac{1}{jk}\Bigg\{&-\sum_h\sum_l(-1)^{h+l}\,\mathrm{sgn}(\xi_h\psi_l)K_1e^{-jk|D_t|}\\&+\sum_h(-1)^h\int_{\psi_1}^{\psi_2}\frac{\xi_h}{R^2-D_t^2}e^{-jkR}d\psi\\&+\sum_l(-1)^l\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\psi_l}{R^2-D_t^2}e^{-jkR}d\xi\Bigg\}\end{aligned} \tag{28a}$$

$$K_1=\begin{cases}\sin^{-1}(1/\varphi_0) & : C_1\,\mathrm{sgn}(\xi_h\psi_l)\geq 0\\ \pi-\sin^{-1}(1/\varphi_0) & : C_1\,\mathrm{sgn}(\xi_h\psi_l)<0\end{cases} \tag{28b}$$

また，(c) の R の場合の I_{14} を $I_{14}^{(c)}$ とおくと，$I_{14}^{(c)}$ は式 (26a)，(26b) を用いて，次式で表される．

$$I_{14}^{(c)}=-\frac{1}{jk}\sum_{h=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{h+l}e^{-jkR}$$

$$+\sum_{h=1}^{2}(-1)^h\left\{-\int_{\Theta_{h1}}^{\Theta_{h2}}\xi_h+\int_{\Theta_{1h}}^{\Theta_{2h}}\psi_h\right\}\frac{e^{-jkR}}{R}d\Theta \tag{29}$$

以上より，式 (13) の { } 内の各項の多重積分は単積分項の和で表されることになる．更に変数 z，t で 2 重積分して，式 (8) で係数を除いた①〜④に相当する項を求めることができる．パラメータ D_t は以下の式

$$D_t=\bar{z}-t,\quad \bar{z}=\tilde{A}_{zt}(z-z_a)$$
$$z_1=0,\quad z_2=z_0$$
$$t_1=0,\quad t_2=t_0 \tag{30}$$

で与えられるので，$\bar{z}$，t に関する 2 重積分は式 (26a) に示す単積分で表される．したがって，式 (13) は最大 2 重積分で表されることとなる．ただし，式 (13) の { } 内の第四項の式 (29) は連続関数ではないので，$\bar{z}$，t で積分した式 $I_4^{(c)}$ は，次式のように展開した式で表す．

$$\begin{aligned}I_4^{(c)}=&\sum_{m=1}^{2}\sum_{h=1}^{2}(-1)^{m+h}\\&\times\left\{\sum_{n=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{n+l}\frac{-1}{jk^3}(1+jkR)e^{-jkR}\right.\\&+\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\frac{1}{jk}\left[\int_{\Theta_{h1}}^{\Theta_{h2}}\xi_h-\int_{\Theta_{1h}}^{\Theta_{2h}}\psi_h\right]\\&\times e^{-jkR}d\Theta\\&+\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\frac{1}{jk}\left[\int_{U_{m1}}^{U_{m2}}\bar{z}_m-\int_{U_{1m}}^{U_{2m}}t_m\right]\\&\times e^{-jkR}dU\\&+\left[\int_{U_{m1}}^{U_{m2}}\bar{z}_m-\int_{U_{1m}}^{U_{2m}}t_m\right]\times\left[\int_{\Theta_{h1}}^{\Theta_{h2}}\xi_h-\int_{\Theta_{1h}}^{\Theta_{2h}}\psi_h\right]\\&\left.\times\frac{e^{-jkR}}{R}d\Theta dU\right\}\end{aligned} \tag{31a}$$

$$U_{mn}=\bar{z}_m-t_n \tag{31b}$$

式 (31a) の 2 重積分は，式 (28a) で $C_1=0$ とした式で表され，連続関数の単積分となる．

2.3 RWG 関数形モノポールセルと正弦関数形モノポールセル間

図 1 と同じ座標系を考える．RWG 関数形モノポールセルは (x,y,z) 座標系，正弦関数形モノポールセルは (r,s,t) 座標系とする．したがって，RWG 関数形は z 軸方向に一様で xy 面を水平に流れる電流，正弦関数形は rs 面に一様で t 軸を流れる電流である．ベクトル電流関数は RWG 関数形セルについては式 (11) で表され，正弦関数形セルについては次式で表される．

$$\mathbf{J}_N^{\nu}=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\bar{S}_N\sin kt_0}\sin k(t-t_\nu)\hat{t} \tag{32a}$$

$$t_1=0,\quad t_2=t_0 \tag{32b}$$

式 (8) の $\bar{Z}_{MN}^{\mu\nu}$ は，以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{MN}^{\mu\nu}=&\frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2z_0\bar{S}_M^{\mu}\bar{S}_N\sin kt_0}\\&\times\left\{-\frac{2}{k}\int_0^{z_0}\int_0^{t_0}\int_{\bar{S}_M^{\mu}}\int_{\bar{S}_N}\cos k(t-t_\nu)\right.\\&\times\frac{e^{-jkR}}{R}dS_N dS_M dt dz\\&+\frac{2}{k^2}\sin kt_0\int_0^{z_0}\int_{\bar{S}_M^{\mu}}\int_{\bar{S}_N}\frac{e^{-jkR_{t=t_{\nu'}}}}{R_{t=t_{\nu'}}}dS_N dS_M dz\\&+\frac{1}{k}\int_0^{z_0}\int_0^{t_0}\int_{l_M^{\mu}}\int_{\bar{S}_N}\rho_0\cos k(t-t_\nu)\\&\times\frac{e^{-jkR}}{R}dS_N dl_M dt dz\\&\left.-\frac{1}{k^2}\sin kt_0\int_0^{z_0}\int_{l_M^{\mu}}\int_{\bar{S}_N}\rho_0\frac{e^{-jkR_{t=t_{\nu'}}}}{R_{t=t_{\nu'}}}dS_N dl_M dz\right\}\end{aligned} \tag{33}$$

ただし，$t_{\nu'}$ は正弦関数の最大値となる位置であり，ν との関係は，

$$\nu'=3-\nu \tag{34}$$

と表される．

式 (33) の { } 内第一項の 2 重面積分は文献 [10] の J_2 に該当し，単積分化済みである [10]．ただし，距離ベクトル $\mathbf{R}$ の z 成分を D_z に変更したものとなる．前節と同様に J_2 内の z_a を D_t に置き換えた式を $\bar{J}_2$ とおき，式 (25) と同様の変数変換を用いると，式 (33) の { } 内第一項の積分値 I_{21} は式 (31b) の変数を用いて以下の式で表される．

$$\begin{aligned}I_{21}=&\int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2}\int_{t_1}^{t_2}\cos k(t-t_\nu)\,\bar{J}_2(\bar{z}-t)dtd\bar{z}\\=&\frac{1}{k}\left\{\sum_{m=1}^{2}(-1)^m\int_{U_{m1}}^{U_{m2}}\sin k(U-\bar{z}_m+t_\nu)\bar{J}_2(U)dU\right.\\&\left.+\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\sin k(t_n-t_\nu)\int_{U_{1n}}^{U_{2n}}\bar{J}_2(U)dU\right\}\end{aligned} \tag{35}$$

式 (33) の { } 内第二項の積分は，$t = t_{\nu'}$ における $\bar{J}_2$ の z に関する積分であり，式 (35) の最後の項の積分で，$n = v'$ の場合に相当する．次に，式 (33) の { } 内第三項の積分は，式 (13) の { } 内第三項の積分値を J_3 とおくと，式 (35) で $\bar{J}_2$ を J_3 に置き換えた式となる．式 (33) の { } 内第四項の積分は，第二項の積分と同様に $\bar{J}_2$ を J_3 に置き換えた式 (35) の最後の項の積分で，$n = v'$ の場合に相当する．以上より，式 (33) の各項は最大 2 重積分で表される．

3. 数値計算結果

本解析法の妥当性の検証及び有効性の範囲の確認を行う．

式 (1) の 6 重積分を直接数値積分する DI 法と，関数 e^{-jkR}/R を

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{e^{-jkR} - 1}{R} + \frac{1}{R} \tag{36}$$

とおいて，右辺第一項の積分は数値的に行い，第二項の積分は解析的に行う SS 法と比較検討する．ただし，DI 法と SS 法の数値積分は解析的手法と同様に z，t に関する 2 重積分を単積分した 5 重積分の和として行っている．式 (36) の右辺第二項の積分は今回の解析法と同様の手法を用いている．各セグメントは同一形状のモノポールセルから構成され，セルの大きさは，直角三角形が 4mm × 4mm の 2 等辺三角形で柱の長さが 2mm としている．また，セグメントの比誘電率は 10 である．計算周波数は周波数特性以外，1.5GHz である．解析的手法の 2 重積分は，z，t に関する単積分はガウス・ルジャンドル積分とし，他のパラメータに関する単積分はガウス・ルジャンドル積分と二重指数関数型公式 [12] との併用としており，その他の積分は文献 [10] の 3 章に記載されている方法と同一である．収束誤差は基本的に文献 [4] と同一であるが，z，t に関する単積分は 10^{-7} とした．また，以降の説明で水平方向は xy (rs) 面，垂直方向は z (t) 軸方向を意味し，$\tilde{A}_{zt} = 1$ としている．

3.1 RWG 関数形セグメント間インピーダンス

図 3 (a)，(b) に座標系が type1 の直角三角柱セルからなるダイポールセグメント，座標系が type2 の直角三角柱セルからなるモノポールセグメントの本手法による自己インピーダンスの周波数特性及び SS 法による結果を基準とした相対誤差を示す．本手法と SS 法は良く一致している．図 3 (c) は本手法と SS 法による

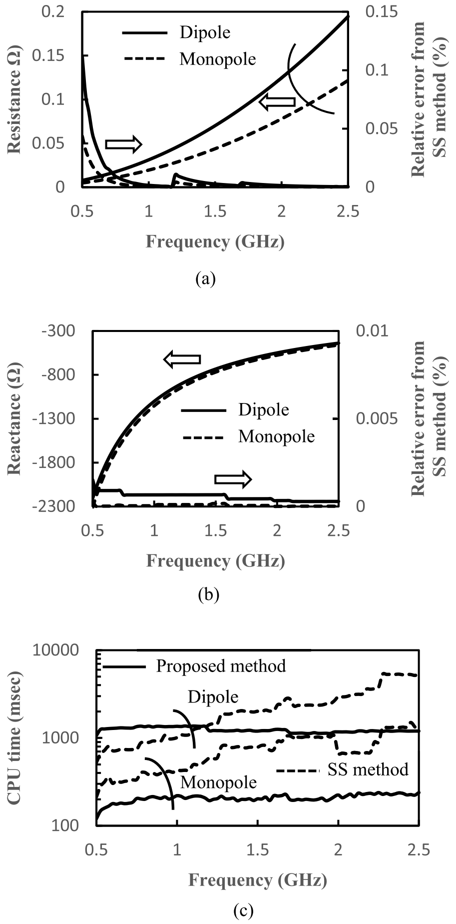

図 3　自己インピーダンスの周波数特性 (a) 抵抗成分 (b) リアクタンス成分 (c) CPU 時間

Fig. 3　Frequency characteristics of the self-impedance. (a) Resistance, (b) Reactance, (c) CPU time.

CPU 時間を示す．本手法は周波数に対してほぼ一定の値となる特徴を有している．また，SS 法は周波数が高くなると CPU 時間が長くなる傾向にある．これは，周波数が高くなると積分領域が等価的に広がるため，数値積分にかかる時間が長くなるためと考えられる．モノポールセグメントは計算周波数全体で SS 法より CPU 時間が短いが，ダイポールセグメントは約 1.2GHz より低い周波数では SS 法の方が短い CPU 時間になっている．この要因は図 4 に示すように，記号 PR で示した本手法に対する SS 法の CPU 時間比が重複セルでは 2 程度であり，隣接セル間では 0.5 より小さいことによるものである．計算時間を最小にするには，重複セルでは本手法を用い，隣接セル間については CPU 時間比が 1 になるまで SS 法を用いることに

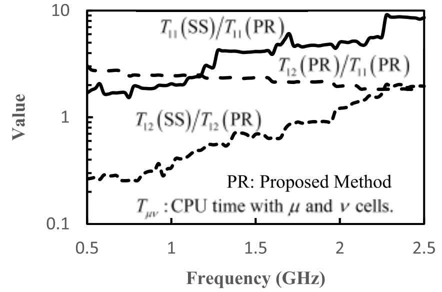

図 4　ダイポールセグメントの各モノポールセル間 CPU 時間の比

Fig. 4　CPU time ratio between monopole cells of the two dipole segments.

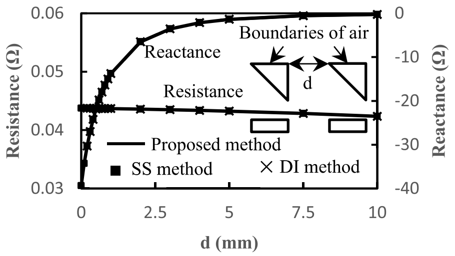

図 5　モノポールセグメントの水平方向の距離 d と相互インピーダンス

Fig. 5　Mutual impedance with distance d of the lateral side between monopole segments.

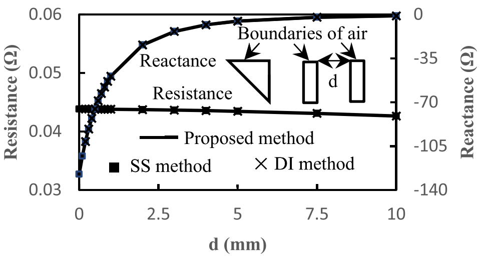

図 6　モノポールセグメントの垂直方向の距離 d と相互インピーダンス

Fig. 6　Mutual impedance with distance d of the vertical side between monopole segments.

なるが，セグメントの大きさなどにより条件が変わると思われるので，今後の検討課題とする．

相互インピーダンスについて，ダイポールセグメント間の場合は文献 [10] の結果を垂直方向に積分した値であるので，水平（横）方向及び垂直方向の距離に対する特性は，本手法は SS 法及び DI 法と一致することがわかる．次に，図 5 及び図 6 にモノポールセグメントについて，水平（横）方向及び垂直方向の距離を変えた場合の相互インピーダンスを示す．3 手法とも一致した結果が得られている．更に表 2 に，上記構成

表 2　相互インピーダンスの CPU 時間

Table 2　CPU time of mutual impedance.

*PR: Proposed Method　　time unit is msec.

		dipole segments			monopole segments		
	d (mm)	*PR	SS	DI	*PR	SS	DI
lateral side	0	481	102		81	22	
	0.5	495	99	855	115	20	84
	1	365	78	197	87	15	47
	5	158	39	43	45	10	15
vertical side	0	337	539		64	184	
	0.5	301	220	2805	55	71	1054
	1	279	137	521	54	22	170
	5	161	39	43	30	10	15

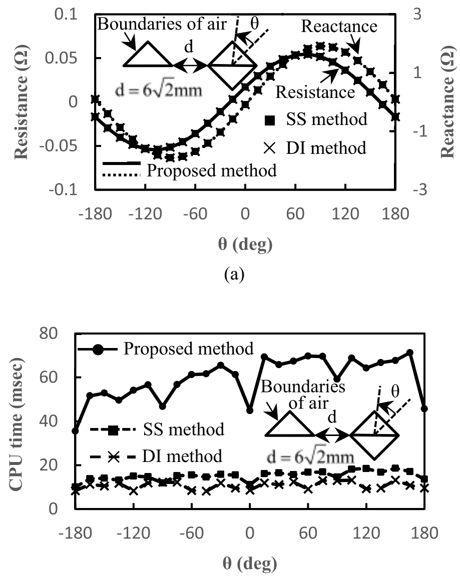

図 7　ダイポールセグメントの回転角 θ とモノポール・ダイポールセメント間相互インピーダンス (a) インピーダンス (b) CPU 時間

Fig. 7　Mutual impedance between the monopole segment and the dipole segment with angle θ of the dipole segment. (a) Impedance, (b) CPU time.

に対する CPU 時間を示す．本手法は SS 法と比較して，水平 (横) 方向は全体的に CPU 時間が長いが，垂直方向は接触時あるいは極近傍で CPU 時間が短いことがわかる．垂直方向に接触したダイポールセグメントの CPU 時間の周波数特性は図 4 と同様の特性が得られ，自己インピーダンスの場合と同じく，計算時間の最小化の検討が必要と考える．最後に，図 7 にモノ

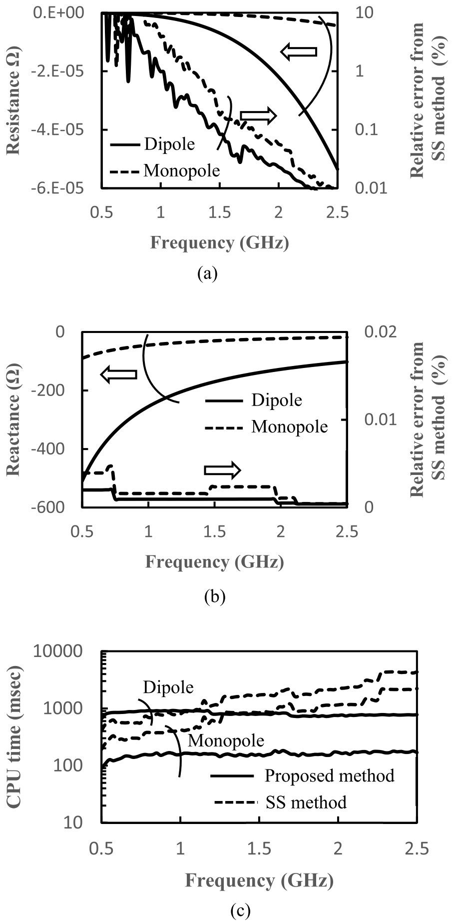

図 8　重複セルを有した相互インピーダンスの周波数特性
(a) 抵抗成分 (b) リアクタンス成分 (c) CPU 時間

Fig. 8　Frequency characteristics of the mutual-impedance with a overlapped cells. (a) Resistance, (b) Reactance, (c) CPU time.

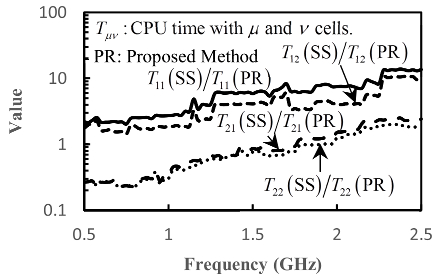

図 9　ダイポールセグメントの各モノポールセル間 CPU 時間の比

Fig. 9　CPU time ratio between monopole cells of the two dipole segments.

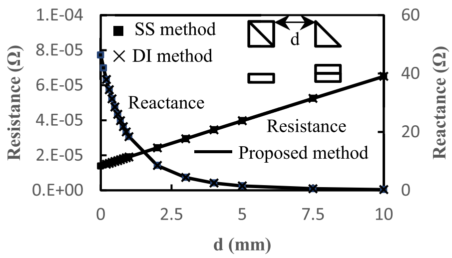

図 10　ダイポールセグメントの水平方向の距離 d と相互インピーダンス

Fig. 10　Mutual impedance with distance d of the lateral side between dipole segments.

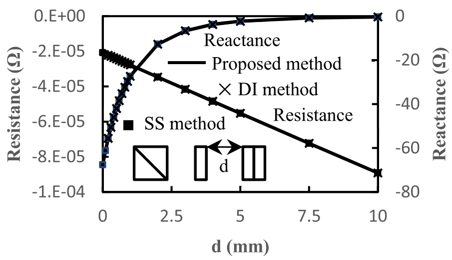

図 11　ダイポールセグメントの垂直方向の距離 d と相互インピーダンス

Fig. 11　Mutual impedance with distance d of the vertical side between dipole segments.

ポールセグメントと一番目のセルの高さがモノポールセグメントと同一なダイポールセグメントについて，ダイポールセグメントの中心軸を基に回転させた場合の相互インピーダンス及び CPU 時間を示す．3 手法ともインピーダンスの値は一致しており，CPU 時間は SS 法と DI 法がほぼ同じ値で最も短いことがわかる．

3.2　RWG 関数形セグメントと正弦関数形セグメント間の相互インピーダンス

図 8 (a)，(b) に座標系が type1 の直角三角柱セルからなる RWG 関数形ダイポールセグメントと重複セルを有する正弦関数形ダイポールセグメント，座標系が type2 の直角三角柱セルからなる RWG 関数形モノポールセグメントと重複する正弦関数形モノポールセグメントの本手法による相互インピーダンスの周波数特性及び SS 法による結果を基準とした相対誤差を示す．なお，重複セルは $\mu = \nu = 1$ のセルである．本構成は電流が直交しているため，抵抗成分は 0Ω に近い値になるため，抵抗成分の SS 法との相対誤差は大きくなるが，インピーダンスは SS 法と良く一致していると言える．図 8 (c) は本手法と SS 法による CPU 時間を示す．前節と同様の結果が得られている．図 9 に各モノポールセル間の SS 法との CPU 時間比を示す．重複セル及び縦に隣接するセルは 1 以上であるが，そ

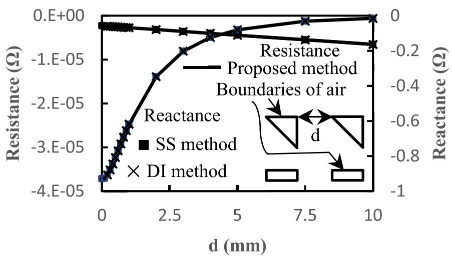

図 12　モノポールセグメントの水平方向の距離 d と相互インピーダンス

Fig. 12　Mutual impedance with distance d of the lateral side between monopole segments.

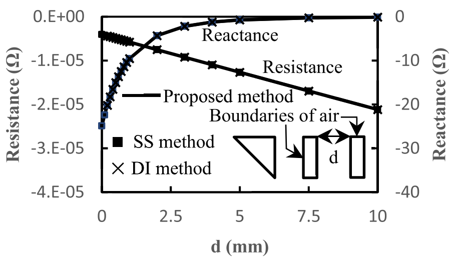

図 13　モノポールセグメントの垂直方向の距離 d と相互インピーダンス

Fig. 13　Mutual impedance with distance d of the vertical side between monopole segments.

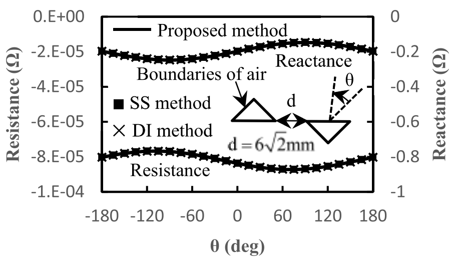

図 14　ダイポールセグメントの回転角 θ とモノポール・ダイポールセメント間相互インピーダンス

Fig. 14　Mutual impedance between the monopole segment and the dipole segment with angle θ of the dipole segment.

れ以外は約 2GHz 以下は 1 以下となっており，計算時間の最小化を図るには前節と同様の手法が必要と思われる．次に，セグメント間の距離を変えた場合のインピーダンス特性を図 10〜図 13 に，正弦関数形ダイポールセグメントの回転角に対する RWG 関数形モノポールセグメントとのインピーダンス特性を図 14 に示す．3 手法とも良く一致している．CPU 時間は前節と同様の結果である．

4. むすび

本論文では，RWG 関数形四角柱ダイポールセグメント及び RWG 関数形三角柱モノポールセグメントと正弦関数形柱状ダイポールセグメント及び正弦関数形モノポールセグメントについて，文献 [4] 以外の全ての組み合わせのセグメント間の自己・相互インピーダンスの 6 重積分式の積分次数低減化を実施し，最大 2 重積分で表されることを示した．次に，SS 法及び DI 法を用いた計算結果との比較検討を行い，本解析法の妥当性の検証及び有効性の範囲を確認した．計算時間の観点では，少なくとも本手法はセルが重複あるいは三角形端面が接触する構成のとき有効であり，他のセルが接触する構成では，SS 法が有効な周波数の上限があることがわかった．その他の比較的距離が短い場合は SS 法が有効であることがわかった．

文　　献

[1] X. Li, L. Lei, H. Zhao, L. Guo, M. Jiang, Q. Cai, Z. Nie, and J. Hu, “Efficient solution of scattering from composite planar thin dielectric-conductor objects by volume-surface integral equation and simplified prism vector basis functions,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.66, no.5, pp.2686–2690, May 2018.

[2] S.M. Rao, D.R. Wilton, and A.W. Glisson, “Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-30, no.3, pp.409–418, May 1982.

[3] N.N. Wang, J.H. Richmond, and M.C. Gilbeath, “Sinusoidal reaction formulation for radiation and scattering from conducting surfaces,” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol.AP-23, no.3, pp.376–382, May 1975.

[4] 吉川幸広，陳　強，“分極電流ガラーキンモーメント法における平行配置直角三角柱セグメント間インピーダンスの単積分化に関する検討，” 信学論（B），vol.J105-B, no.6, pp.466–473, June 2022. DOI:10.14923/transcomj.2021JBP3033

[5] 吉川幸広，宮下裕章，千葉　勇，牧野　滋，“分極電流モーメント法におけるインピーダンス行列要素の積分次数低減，” 信学論（B），vol.J86-B, no.9, pp.1721–1730, Sept. 2003.

[6] 吉川幸広，宮下裕章，牧野　滋，“面素モーメント法における任意位置屈曲方形ダイポール間インピーダンスの単積分表現式，” 信学論（B），vol.J88-B, no.6, pp.1119–1129, June 2005.

[7] D.R. Wilton, S.M. Rao, A.W. Glisson, D.H. Schaubert, O.M. Al-Bundak, and C.M. Butler, “Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-32, no.3, pp.276–281, March 1984.

[8] R.D. Graglia, “On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green’s function or its gradient on a plane triangle,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.41, no.10, pp.1448–1455, Oct. 1993.

[9] T.F. Eibert and V. Hansen, “On the calculation of potential integrals for linear source distributions on triangular domains,” IEEE

Trans. Antennas Propag., vol.43, no.12, pp.1499–1502, Dec. 1995.
[10] 吉川幸広，陳　強，“2 組の直角三角形セルからなる平行ダイポールセグメント間インピーダンスの単積分化に関する検討,” 信学論（B），vol.J104-B, no.2, pp.93–101, Feb. 2021. DOI:10.14923/transcomj.2020JBP3040
[11] 吉川幸広，澤谷邦男，陳　強，“共平面形プリントダイポールアンテナのガラーキンモーメント法解析,” 信学論（B），vol.J96-B, no.9, pp.1001–1009, Sept. 2013.
[12] 渡部　力，名取　亮，小国　力，Fortran77 による数値計算ソフトウェア，丸善株式会社，1989.

（2022 年 7 月 19 日受付，9 月 21 日再受付，
10 月 31 日早期公開）

吉川　幸広　（正員）

昭 54 東北大・工・通信卒．昭 56 同大大学院修士課程了．同年三菱電機（株）入社．以来，レーダ，移動通信，衛星通信等のアンテナ，マイクロ波受動回路素子の開発に従事．平 18 退職．平 26 東北大学大学院工学研究科電気・通信工学専攻博士課程了．工博，IEEE 会員．

陳　　強　（正員：フェロー）

昭 63 西安電子科技大卒．平 6 東北大大学院博士課程了．現在，同大学院工学研究科通信工学専攻教授．移動通信用アンテナ，アレーアンテナ，電磁界の数値解析の研究に従事．工博，IEEE シニア会員，平 5 本会学術奨励賞受賞．平 8 及び平 18 本会通信ソサイエティ活動功労賞．平 21 同論文賞及び喜安善市賞受賞．