大規模問題に対するモーメント法の高速化

Fast Method of Moments for Large-scale Electromagnetic Problems

陳 強　今野 佳祐　勝田 肇　澤谷 邦男
Qiang Chen　Keisuke Konno　Hajime Katsuda　Kunio Sawaya

東北大学
Tohoku University

1　まえがき

アンテナの電磁界数値解析手法として，モーメント法 (Method of Moments, MoM) が挙げられる [1]．モーメント法では，アンテナ及び散乱体を N 個の電流セグメントに分割した場合，$[\mathbf{Z}]_{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}[\mathbf{I}]_{\mathbf{N}} = [\mathbf{V}]_{\mathbf{N}}$ という行列方程式を解くことにより，未知のアンテナ及び散乱体上の電流ベクトル $[\mathbf{I}]_{\mathbf{N}}$ を求めることができる．ここでは，$[\mathbf{Z}]_{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ は電流セグメント間の自己・相互インピーダンス行列であり，$[\mathbf{V}]_{\mathbf{N}}$ は入射電圧ベクトルである．一般的に行列方程式を解くのに要する計算時間が $O(N^3)$ となるため，N が大きい大規模問題を解く場合，モーメント法の高速化が不可欠である．本稿では，モーメント法のアルゴリズム的な高速化手法及びハードウェア的な高速化手法に関する研究を紹介する．

2　高速アルゴリズム：CG-FMM

代表的な高速モーメント法の 1 つとして，CG-FMM(Conjugate gradient-fast multipole method) が知られている [2]．CG-FMM は，共役勾配法 (Conjugate gradient method, CG 法) と高速多重極法 (Fast multipole method, FMM) という 2 つのアルゴリズムを組み合わせたものである．

CG 法は, 行列方程式の反復解法であり, 反復処理で近似解を更新して真の解に近づけるという手法である．反復処理では，行列・ベクトル積の計算が含まれているため，1 回の計算時間は $O(N^2)$ となる．収束までの反復回数を N_{it} とすれば，CG 法の計算時間が $(N_{it}N^2)$ となる．CG 法では，インピーダンス行列 $[\mathbf{Z}]$ を保持する必要があるため，CG 法だけを用いても $O(N^2)$ の大量な計算機メモリが必要である．一方，FMM は遠方セグメント間のインピーダンス行列 $[\mathbf{Z}]$ を個別に計算する代わりに, 多重極展開係数をグループ単位でまとめて保持しておくという手法である（図 1）．FMM を CG 法と組み合わせると, 遠方セグメント間のインピーダンス行列を保持する分の計算機メモリを削減できる上, 行列・ベクトル積の演算をまとめて行えるので, 計算時間も削減できる．

筆者らはこれまで, CG-FMM の反復 1 回あたりの計算時間が解析モデルの形状に依存することを理論と数値シミュレーションにより明らかにした．その結果, FMM によって反復 1 回当たりの計算時間が削減できるのは, グループ内のセグメント配置が 2 次元状のモデルに限られ, グループ内のセグメント配置が 1 次元状のモデルでは, CG 法と同じ $O(N^2)$ のままであることが分かった．1 次元状の線状ダイポールアンテナと 2 次元状の板状アンテナを CG-FMM で数値解析し, 反復 1 回あたりに要した計算時間を図 2 に示す．CG-FMM の反復 1 回当たりの計算時間は, 線状ダイポールアンテナでは CG 法と同じ $O(N^2)$ のまま, 板状アンテナでは $O(N^{1.5})$ となっており, CG-FMM の高速化効果は解析モデルの形状に依存することが分かった [3].

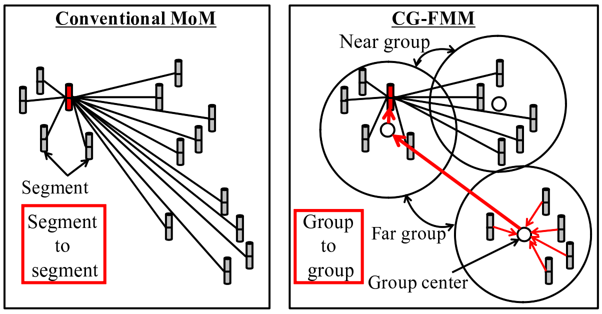

図 1　FMM の概念図.

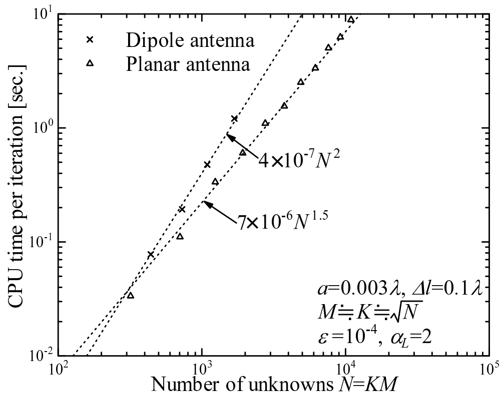

図 2　CG-FMM の反復 1 回あたりの計算時間.

3　高速アルゴリズム：CBFM

CG-FMM のような反復法に基づく高速モーメント法と違い，行列方程式の直接解法に基づく高速モーメント法として，CBFM(Characteristic basis function method) が挙げられる [4]．CBFM では，まず図 3 に示すように N 個の未知数を M 個のブロックに分けて，各々のブロック内でモーメント法を実施し，未知電流を直接解法で求める．ブロック内の未知電流を求める際, 隣接ブロックとの電流の連続性を無視すると, 本来は存在しないはずの端効果がブロック内の電流に発生し，CBFM の精度が悪化する．そこで, オーバーラップ領域 w_e をブロック間に設けることにより，ブロック内の電流の端効果を除去する．それから, ブロック内の電流を基底関数, すなわち Characteristic basis function(CBF) としたガラーキン法を適用し, 元の大規模行列方程式を小さく圧縮してから解くことで大規模行列方程式の解が得られる．筆者らは, CBFM の計算時間を最小にするブロック数 M_o 及びそのときの最小計算時間を解析的に導出し, それらの妥当性を数値解析により実証した．その結果, $M_o \approx 0.9N^{1/3}$, 最小計算時間は $O(N^{7/3})$ となることが分かった．同じサイズの問題でも, 反復回数がモデルによって異なる反復法に対し, CBFM は直接法に基づいているため, その計算時間は問題の大きさだけで決まるという長所がある．従って，CBFM は，CG-FMM が不得意とする 1 次元状

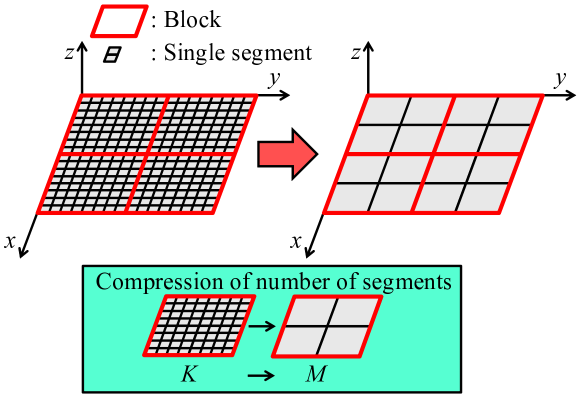

図 3　CBFM の概念図.

モデルや悪条件問題の数値解析を高速に行うのに向いていると言える [5].

4　ベクトル・スパコンによる高速化

ベクトル・スーパーコンピュータはベクトル演算の機能を持っており，ベクトルの演算時間と全演算時間の割合を示すベクトル化率が高いプログラムに対して高速な計算効果が発揮できる．FDTD 法は，大規模問題における膨大の Yee セルに対し繰り返し演算を行うため，ベクトル化率が極めて高くスーパーコンピュータによる高速化効果が大きい．一方，モーメント法では，座標変換や積分計算などを行なうため演算は複雑となり，プログラムのベクトル化率が低い．筆者らは図 4 に示すフローチャートで [**Z**] を求めることにより，ベクトル化率を 99.7%まで向上することができた．その結果，ベクトル・スパコン SX を用いた [**Z**] の生成にかかる CPU 時間を約 1/40 まで短縮できた [6].

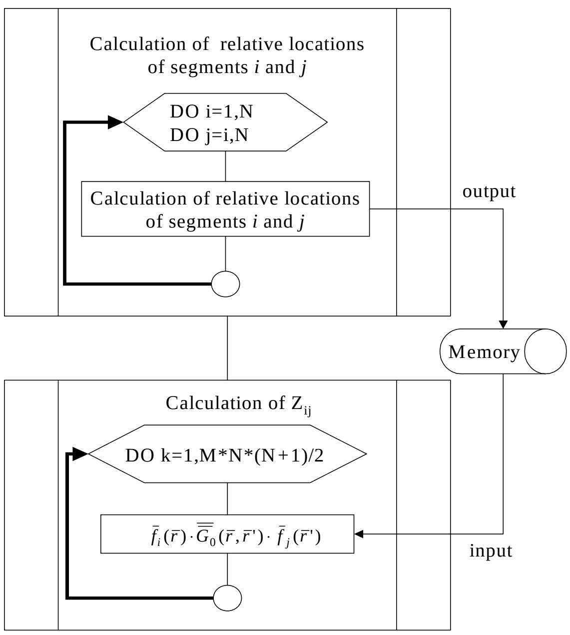

図 4　高いベクトル化率を得るための [**Z**] 計算フローチャート.

5　GPU による高速化

GPU (Graphics Processing Units) とは, 多数のプロセッサによる並列演算が可能なデバイスであり, 近年ではその高い演算能力がモーメント法の高速化に応用されている [7]. GPU による演算では, 大きな演算を並列演算可能な小さな演算 (Thread) に分割する必要がある．インピーダンス行列 [**Z**] の生成を高速化するときに，[**Z**] の各要素の演算を Thread とし，多数のプロセッサに割り当てる．本研究で用いられる GPU(Tesla C2075) の場合は，GPU 内のプロセッサは 32 個ずつのグループにまとめられており, 各グループへの Thread の振り分け方が重要である.

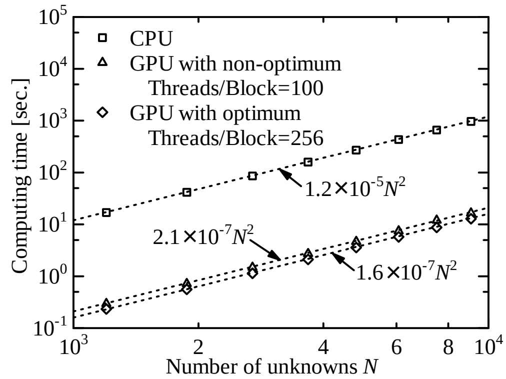

図 5　GPU によるインピーダンス行列の生成の高速化.

筆者らは, Threads/Block というパラメータを 32 の倍数かつ大きな値にすれば演算時間が短くなることを明らかにした．図 5 に CPU と GPU によってインピーダンス行列の生成に必要な演算時間を示す．CPU より，GPU を用いた場合は約 57 倍, Threads/Block を最適化した場合はさらに約 1.3 倍の高速化が達成できることが分かる [8].

6　まとめ

本稿では, 大規模問題に対するモーメント法の高速化に関する研究の一部を紹介した．今後，モーメント法の高速化アルゴリズムの研究だけではなく，計算機の高速な演算性能を生かしたモーメント法アルゴリズムの研究開発の進展を期待する.

謝辞

研究成果の一部は, 東北大学サイバーサイエンスセンターのスーパーコンピュータ SX-9 を用いて得られたものであり, ここで関係各位に感謝する.

参考文献

[1] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan Press, New York, 1968. (Reprinted by Wiley-IEEE Press, 1993.)

[2] R. Coifuman, et al., *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol.35, no.3, pp.7-12, June 1993.

[3] K. Konno, et al, *IEICE Trans. Commun.*, vol.E93-B, no.10, pp.2611-2618, Oct. 2010.

[4] V.V.S. Prakash, et al., *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol.36, no.2, pp.95-100, Jan. 2003.

[5] K. Konno, et al, “Optimization of block size for CBFM in MoM,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2012(accepted).

[6] S. Furuya, et al., Proc. The 5th International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory (ISAPE), pp. 235-238, 2000.

[7] E. Lezar, et al., *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol.52, no.6, pp.120-135, Dec. 2010.

[8] 勝田ら, 信学技報，AP2012-28, pp. 25-30, 2012 年 6 月.